Université Abdelhafid Boussouf, Mila
Institut de Mathématiques et Informatiques
Première année Master Mathématiques Appliquées et fondamentals 2025/2026

Matière : *Equations aux différences*
Responsable : *Y. Halim*

Série de TD N° 1

Exercice 1 : (Bac 2024)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = 3u_n - 2. \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes : u_1, u_2 et u_3.
2. On définit la suite (v_n) par :
$$v_n = u_n - 1.$$
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   (b) Écrire l'expression de v_n en fonction de n, puis en déduire celle de u_n.

Exercice 2 :

Donner la forme générale de la solution de l'équation aux différences suivant

$$x_{n+1} = a(n)x_n, \quad x_{n_0} = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{1}$$

où $a(n) \neq 0$, et $a(n)$ est un fonction réel définie sur $\mathbb{N}_0$.

Application : Trouvez les solutions des équations aux différences suivants :

(a) $x_{n+1} - 3^n x_n = 0, \quad x_0 = c.$

(b) $x_{n+1} - \frac{n}{n+1}x_n = 0, \quad n \geq 1, \quad x_1 = c.$

Exercice 3 :

Donner la forme générale de la solution de l'équation aux différences suivant

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \quad y_{n_0} = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2}$$

où $a(n) \neq 0$, et $a(n)$ et $g(n)$ sont deux fonctions réels définies sur $\mathbb{N}_0$.

Application : Trouvez les solutions des équations aux différences suivants :

(c) $x_{n+1} = 2x_n + 3^n, \quad x(1) = 0.5.$

(b) $x_{n+1} = (n+1)x_n + 2^n(n+1)!, \quad x(0) = 1.$

Exercice 4 : (Interrogation 2024)

Soit $\{L_n\}_{n\geq 0}$ la suite de Lucas définie par

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \quad L_0 = 2, L_1 = 1.$$

1. Donner la forme des solutions (Formule de Benet) de la suite de Lucas.
   (on note les racines par α et β, avec $\alpha > \beta$).
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{L_{n+r}}{L_n}$, avec $r \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que
$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n, \quad \forall n \geq 1. \tag{3}$$

Exercice 5 : (Interrogation 2022)

Résoudre les équations aux différences suivantes

$$x_{n+1} - \frac{n}{n+1}x_n = \frac{1}{n}, \quad x_1 = 2. \tag{4}$$

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = e^{nlog(3)}n^3 + 3^n n. \tag{5}$$