

Travaux Dirigés 1 – Introduction aux Systèmes Dynamiques

Préparé par : **Chennaf Bouchra**
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf – Mila

Année universitaire 2025–2026

Exercice 1

Pour Chaque equation dis si elle est linéaire ou non linéaire, et indique son ordre :

1. $t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + y = 0$,
2. $y'' + ty' + e^t y = 0$,
3. $y' + \cos y = 0$,
4. $y'' + (y')^2 + y = 0$,
5. $ty' + y = t^3$,
6. $y' = y \ln(y)$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\frac{dx}{dt} = te^{-x}$,
2. $\frac{dx}{dt} = tx$,
3. $\frac{dy}{dt} = t(1 + y^2)$,
4. $\frac{dy}{dt} = e^{t-y}$,
5. $\frac{dy}{dt} = (t^2 + 1)y$,
6. $\frac{dy}{dt} = t^2 \sin(y)$,
7. $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{1+y}$,
8. $\frac{dy}{dt} = t^2 \sin(y)$,
9. $\frac{dy}{dt} = y \cos(t)$.

Exercice 3

Considérons :

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la solution existe globalement,
2. déterminer la solution explicite et étudier son comportement quand $t \rightarrow \infty$.

Exercice 4

Montrer l'équivalence entre la forme différentielle et la forme intégrale :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Exercice 5

1. Soit $f(x) = x^2$. Est-elle globalement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $f(x) = \sin(x)$. Montrer que f est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Mettre le système différentiel :

$$\begin{cases} u'' = au' + bu + cv' + dv, \\ v'' = ev' + fv + gu' + hu \end{cases}$$

sous la forme d'un système linéaire :

$$x' = Ax$$

où x est un vecteur de dimension n convenable et A une matrice carrée $n \times n$.

Mettre ensuite le système différentiel non autonome :

$$\begin{cases} u'' = au' + bu + cv' + dv + \alpha(t), \\ v'' = ev' + fv + gu' + hu + \beta(t) \end{cases}$$

sous la forme d'un système autonome :

$$x' = f(x)$$

où x est un vecteur de dimension n convenable.

Enfin, mettre le système différentiel :

$$\begin{cases} u' = uv - \sin u \cos v = h(u, v), \\ v'' = uv' + 2uv + u^3v' + ev = k(u, v, v') \end{cases}$$

sous la forme d'un système :

$$x' = g(x)$$

où x est un vecteur de dimension convenable.

Exercice 7

Montrer que le problème à conditions initiales suivant :

$$x' = |x|^{1/2}$$

possède quatre solutions passant par le point $(0, 0)$ et tracer ces solutions dans le plan (t, x) .

Exercice 8

On considère l'équation différentielle :

$$x' = x|\sin t|$$

1. Écrire l'équation sous la forme d'un système autonome.
2. Étudier l'existence et l'unicité des solutions sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $x(t)$ la solution maximale avec la condition initiale $x(0) = x_0$. Montrer que si $x_0 < 0$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) > 0$.
4. Calculer explicitement les solutions.

Exercice 9

Montrer que si :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

alors :

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Calculer e^{tA} pour :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire la solution du système $\dot{X} = AX$.

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer e^{tA} .

Exercice 12

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + y, \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (1, 0)$$