

Optimisation linéaire

I-Introduction

I- 1- L'optimisation

En général optimiser signifie le fait de chercher une configuration optimale d'un système, c'est à dire, chercher la meilleure configuration parmi tous les configurations possibles du système et ceci, par rapport à un critère donné.

L'optimisation est une branche des mathématiques. Dans la pratique, on part d'un problème concret, on le modélise et on le résout mathématiquement (analytiquement : problème d'optimisation, numériquement : programme mathématique).

I-2- La Modélisation :

Pour décrire (et éventuellement résoudre) un problème d'optimisation nous utilisons la modélisation mathématique. Modéliser un problème consiste à identifier : les variables intrinsèques (inconnues), les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables, l'objectif visé (optimisation).

I-3- Lien minimum/maximum : soit f une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dont on veut trouver le maximum. Le problème $\max_{x \in S} f(x)$ renvoie (x_0, v) alors que le problème $\min_{x \in S} f(x)$ renvoie $(x_0, -v)$. D'où ce lien. Ainsi la recherche d'un maximum peut toujours se ramener à la recherche d'un minimum.

I-4- Problématique

Etant donnée une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, un problème d'optimisation consiste à trouver :

- 1- son minimum v (respectivement. son maximum) dans S
- 2- un point $x_0 \in S$ qui réalise ce minimum (respectivement. maximum) i.e. $f(x_0) = v$.

Appellations

- f est la fonction objectif
- v est la valeur optimale
- x_0 est la solution optimale
- $S = \{\text{solutions réalisables du problème}\}$
- écriture du problème : $\min_{x \in S} f(x)$ resp. $\max_{x \in S} f(x)$

II- Programmation linéaire

C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes. Dans un problème de programmation linéaire (PL) les contraintes et l'objectif sont des fonctions linéaires des

variables. On parle alors de programme linéaire. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. On distingue dans la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombres réels, pour laquelle les variables des équations sont dans $\mathbb{R}^+$ et la programmation en nombres entiers, pour laquelle les variables sont dans $\mathbb{N}$. Bien entendu, il est possible d'avoir les deux en même temps. Cependant, la résolution d'un problème avec des variables entières est nettement plus compliquée qu'un problème en nombres réels.

II-1-Formulation générale d'un programme linéaire

Le problème consistant à trouver un **extremum** (maximum ou minimum) d'une fonction à plusieurs variables, vérifiant en outre un système **d'équations** ou **d'inéquations**, ces fonctions étant **linéaires**.

La fonction à optimiser est baptisée **fonction coût**.

Ou bien sous une autre manière, la programmation linéaire permet la résolution d'un programme linéaire. Un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "**contraintes**" qui sont linéaires (c'est-à-dire que les variables ne sont pas élevées au carré, ne servent pas d'exposant, ne sont pas multipliées entre elles...). Et à partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée objectif.

II-2- La forme canonique :

Pour résoudre un programme linéaire de manière automatique, il faut qu'il ait une certaine forme que l'on appelle "**canonique**". On choisit la forme canonique suivante : un programme linéaire n'a que des contraintes d'infériorité et l'on tente de maximiser la fonction objectif. De plus toutes les variables sont positives.

Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique, c'est à dire un système avec un ensemble d'inéquation et une fonction à optimiser.

- **Définition :**

Lorsqu'on peut modéliser un problème sous forme d'une fonction économique à maximiser dans le respect de certaines contraintes, alors on est typiquement dans le cadre de la programmation linéaire.

$\max z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq m$ $x_j \geq 0, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n$	← Fonction économique m: contraintes n: nbre de variables $x_1, \dots, x_n$
--	---

Z max fonction économique qu'on doit maximiser. On a **m contraintes** et **n variables**. Une solution admissible est une solution qui vérifie toutes les contraintes ; parmi ces solutions admissibles celle(s) pour la(les)quelle(s) la fonction économique est **maximale (minimale)**, s'appelle(nt) **solution(s) optimale(s)**.

Propriété : Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique.

$$\begin{aligned} \text{Min}(z) &= -\max(-z) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j &\geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j &= b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i \end{cases} \end{aligned}$$

$x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0 \Rightarrow$ changement de variable $x'_j = -x_j$ dans le PL

si certaines variables n'ont pas de condition de signe, on pose $x_i = x'_i - x''_i$, avec

$x'_i \geq 0$ et $x''_i \geq 0$.

Remarques:

1. Contraintes non linéaires :

$$2x_1^2 + x_2 \leq 12$$

$$5x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 = 8$$

$$x_1x_2 + 8x_3 \geq 25$$

Elles sont impossibles d'être résolues avec cet outil.

2. Si une variable x_1 est négative, on la remplace par une variable positive $x'_1 = -x_1$. Par exemple :

$$\begin{array}{ll} \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & \text{max: } z = 3x'_1 - 2x_2 - 8x_3' \\ \text{sous:} & \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \Rightarrow 5x'_1 - 2x_2 - 4x_3' \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & x'_1 + 3x_2 - 8x_3' \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & 9x'_1 + 6x_2 + 3x_3' \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \leq 0 & x'_1, x_2, x_3' \geq 0 \end{array}$$

3. Si une variable n'a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives x_1' et x_1'' telles que $x_1 = x_1' - x_1''$. Par exemple :

$$\begin{array}{ll}
 \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & \text{max: } z = 3x_1' - 2x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \\
 \text{sous:} & \text{sous:} \\
 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \Rightarrow 5x_1' - 2x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \leq 8 \\
 x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & x_1' + 3x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \leq 25 \\
 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & 9x_1' + 6x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \leq 17 \\
 x_1, x_2 \geq 0 & x_1', x_2, x_3', x_3'' \geq 0
 \end{array}$$

4. Si le programme linéaire a une contrainte de supériorité, on la remplace par une contrainte d'infériorité en inversant le signe des constantes. Par exemple :

$$\begin{array}{ll}
 \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
 \text{sous:} & \text{sous:} \\
 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \Rightarrow 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
 x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 & -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\
 x_1, x_2, x_3 \geq 0 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{array}$$

5. Si le programme linéaire a une contrainte d'égalité, on la remplace par deux contraintes équivalentes, l'une d'infériorité, l'autre de supériorité. Les variables du programme doivent satisfaire ces deux contraintes, ce qui revient alors à l'égalité de départ. Par exemple :

$$\begin{array}{ll}
 \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
 \text{sous:} & \text{sous:} \\
 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \Rightarrow 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
 x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\
 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17 & 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\
 x_1, x_2, x_3 \geq 0 & 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
 \\
 \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & \\
 \text{sous:} & \\
 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & \\
 \Rightarrow x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \\
 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & \\
 -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 & \\
 x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
 \end{array}$$

III- Exemples de programmes linéaires

III-1 Problème de production

Une entreprise fabrique deux produits P1, P2 dont chaque unité passe dans trois ateliers A1, A2, A3. Chaque unité de produit P1 est vendue 12 D.A et sa fabrication coûte 7 D.A. Chaque unité de produit P2 est vendue 11 D.A et sa fabrication coûte 9 D.A. Les temps de passage (en minutes) de chaque unité de produit dans chaque atelier sont résumés dans le tableau suivant :

	A1	A2	A3
P1	2 min	3 min	3 min
P2	3 min	2 min	1 min

Le temps de travail maximum par jour de l'atelier A1 est de 5h50 min, pour A2 il est de 5 h50 min , pour A3 il est de 5h10min. Pour des raisons commerciales le nombre d'unités de produit P1 doit être compris entre 50 et 100. Calculer le nombre d'unités des produits P1, P2 à fabriquer par jour pour obtenir un bénéfice maximum (en D.A)

✓ Expression du problème : Modélisation

Bénéfice par unité de produit P1 : $12 - 7 = 5$; pour P2 : $11 - 9 = 2$ Si on fabrique x produits P1 et y produits P2

$$Z = 5x + 2y$$

Les variables sont soumises à un certain nombre de **contraintes**. A1, A2 et A3 et des capacités de travail de ces ateliers (en minutes)

$$2x + 3y \leq 350$$

$$3x + y \leq 310$$

$$50 \leq x \leq 100$$

$$x, y \geq 0$$

✓ Interprétation géométrique

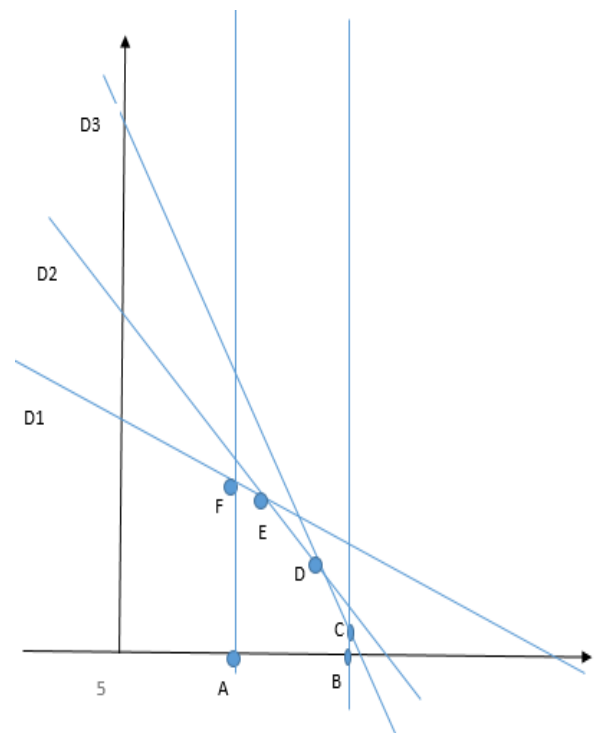
$$D1: 2x + 3y = 350$$

X	0	166.6667
y	175	0

$$D2: 3x + 2y = 350$$

X	0	166.6667
y	175	0

$$D3: 3x + y = 310$$



$$\Delta_k: \max Z = 5x + 2y$$

$$5x + 2y = k$$

Recensement des sommets

A(50,0)

B(100,0)

$$C \text{ (intersection de D3 et (x=100))} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 310 \\ x = 100 \end{cases} \rightarrow C(100, 10)$$

$$D \text{ (intersection de D2 et D3)} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 350 \\ 3x + y = 310 \end{cases} \rightarrow D(90, 40)$$

$$E \text{ (intersection de D1 et D2)} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 350 \\ 3x + 2y = 350 \end{cases} \rightarrow E(70, 70)$$

$$F \text{ (intersection de D1 et (x=50))} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 350 \\ x = 50 \end{cases} \rightarrow F(50, 83.33)$$

$$\text{En A : } Z = 5 \cdot 50 + 2 \cdot 0 = 250$$

$$\text{En B : } Z = 5 \cdot 100 + 2 \cdot 0 = 500$$

$$\text{En C : } Z = 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 = 520$$

$$\text{En D : } Z = 5 \cdot 90 + 2 \cdot 40 = 530$$

$$\text{En E : } Z = 5 \cdot 70 + 2 \cdot 70 = 490$$

$$\text{En F : } Z = 5 \cdot 50 + 2 \cdot 83.33 = 416.66$$

La fonction Z atteint son maximum au point D

III-2 Problème de Mélange (Trois variables)

Il faut mélanger trois gaz de telle manière que le gaz mixte soit le plus bon marché qui possède un pouvoir calorifique entre 1700 et 2000 k. cal/ m3 et un taux de sulfure au plus de 2,8 g/ m3.

Indications sur les trois gaz

Gaz	Pouvoir calorifique en Kcal/m3	Taux de sulfure en g/m3	Prix en
1	1000	6	100
2	200	2	250
3	1500	3	200

Expression du problème

Soient x_1 , x_2 et x_3 le nombre de m3 à fabriquer respectivement du 1^{er}, 2^{ème} et du 3^{ème} gaz.

$$\min Z = 100x_1 + 250x_2 + 200x_3$$

$$1700 \leq 1000x_1 + 2000x_2 + 1500x_3 \leq 2000$$

$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2,8$$

Ici il y a 3 variables et la solution graphique n'est pas possible dans ce cas

IV- L'algorithme du Simplexe

Lorsque le nombre de variables du problème est strictement supérieur à 2, la méthode graphique devient inopérante. On a alors recours à une méthode algébrique basée sur un algorithme appelé algorithme du simplexe.

Méthode du simplexe par un exemple : Considérons le problème d'optimisation linéaire :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \end{array} \quad (1)$$

Afin de se ramener à un système d'équations plutôt que d'inéquations, on introduit les variables d'écart x_4, x_5, x_6 et l'on écrit le problème ci-dessus sous la forme

$$\begin{array}{ll} x_4 = & 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \\ x_5 = & 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \\ x_6 = & 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3, \\ z = & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \end{array} \quad (2)$$

avec pour but de maximiser z sous les contraintes additionnelles $x_i \geq 0$, ($i = 1, \dots, 6$). Il est recommandé de vérifier que si $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ est une solution optimale de ce dernier problème (2), alors les variables (x_1, x_2, x_3) correspondants constituent une solution optimale du problème (1). Inversement, si (x_1, x_2, x_3) est une solution optimale de (1), alors $(x_1, x_2, x_3, 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3)$ constitue une solution optimale de système (2). Le système (2) possède la solution $(0, 0, 0, 5, 11, 8)$ (non optimale mais solution admissible : satisfaisant à l'ensemble des contraintes). On observe que dans l'expression $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$, une augmentation de x_1 entraîne une augmentation de z . L'idée première est alors d'augmenter x_1 autant que possible (sans modifier ni x_2 ni x_3) tant qu'aucune des variables d'écart x_4, x_5 ou x_6 ne devient négative.

Le choix maximal est donc $x_1 = \min(5/2, 11/4, 8/3) = 5/2$, lorsque x_4 devient nulle, et qui fait passer à la solution réalisable $(5/2, 0, 0, 0, 3, 1/2)$. On réécrit le système (2) en exprimant cette fois (x_1, x_5, x_6) (ainsi que z) en termes de (x_2, x_3, x_4) , au moyen de l'équation (l'équation d'échange qui exprime la variable entrante en fonction de la variable sortante, et éventuellement des autres variables hors base)

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4.$$

Ceci donne, après substitutions :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4, \\
x_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4, \\
z &= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4.
\end{aligned}$$

Cette fois, on observe que dans l'expression $z = 25/2 - (7/2).x_2 + (1/2).x_3 - (5/2).x_4$, une augmentation de x_3 (c'est ici le seul choix possible) entraîne une augmentation de z . A nouveau, on augmente donc x_3 autant que possible (sans modifier ni x_2 ni x_4) tant qu'aucune des variables x_1 , x_5 ou x_6 ne devient négative. Le choix maximal est donc $x_3 = \min((5/2)/(1/2), (1/2)/(1/2)) = 1$ lorsque x_6 devient nulle, et qui fait passer à la solution réalisable (2, 0, 1, 0, 1, 0). On récrit le système (3) en exprimant cette fois (x_1 , x_3 , x_5) (ainsi que z) en termes de (x_2 , x_4 , x_6), au moyen de l'équation

$$x_3 = 1 + x_2 + 3.x_4 - 2.x_6$$

Ceci donne, après substitutions :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 - 2.x_2 - 2.x_4 + x_6 \\
x_3 &= 1 + x_2 + 3.x_4 - 2.x_6 \\
x_5 &= 1 + 5.x_2 + 2.x_4 \\
z &= 13 - 3.x_2 - x_4 - x_6
\end{aligned} \tag{4}$$

Puisque les coefficients de x_2 , x_4 et x_6 intervenants dans l'expression de z ci-dessus sont tous négatifs ou nuls, on déduit que la solution réalisable (admissible):

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2 \\
x_2 &= 0 \\
x_3 &= 1 \\
x_4 &= 0 \\
x_5 &= 1 \\
x_6 &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

est une solution optimale, pour laquelle $z = 13$

✓ Méthode des tableaux

La résolution par l'algorithme du simplex se déroule selon 8 étapes avant un nouveau passage.

1ère étape : Écrire le système sous forme standard

Il s'agit de convertir le programme établi sous forme canonique (système d'inéquation) sous la forme standard (système d'équation avec variable d'écarts). Les variables d'écart introduites au cours de cette transformation représentent les contraintes techniques et commerciales disponibles qu'il convient de saturer.

Forme canonique

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 1800 \\ x \leq 400 \\ y \leq 600 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \text{Max } B = 30x + 50y \end{cases}$$

Forme standard

e_1, e_2, e_3 représentant les variables d'écart

$$3x + 2y + e_1 = 1800$$

$$x + e_2 = 400$$

$$y + e_3 = 600$$

$$30x + 50y$$

2^{ème} étape : Construire le premier tableau correspondant à la forme standard

	x	y	e ₁	e ₂	e ₃	
e ₁	3	2	1	0	0	1800
e ₂	1	0	0	1	0	400
e ₃	0	1	0	0	1	600
MAX	30	50	0	0	0	0

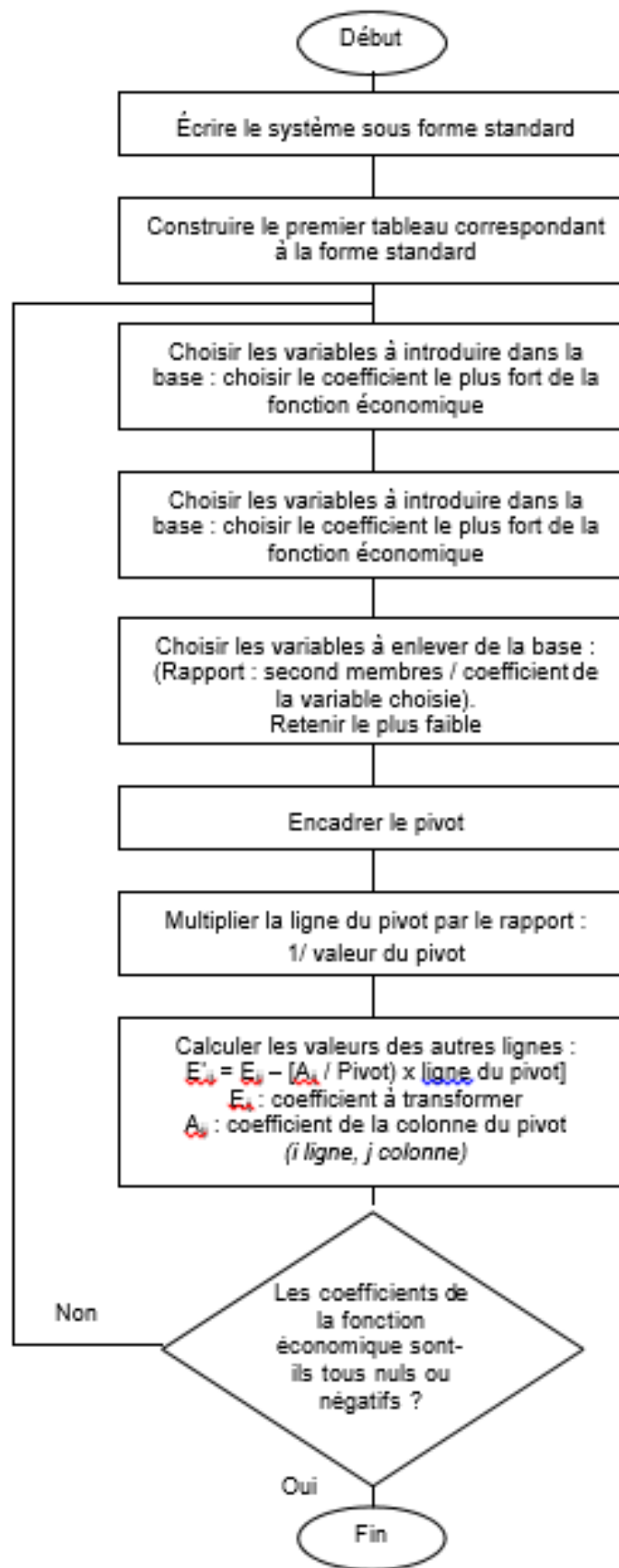
Coefficient E_{ij}
 (Zone verte)

Variables d'écart

valeur en base
(encadré bleu)

Valeur solutions
(encadré orange)

(zone jaune)



3^{ème} étape : Choisir les variables à introduire dans la base. Pour cela choisir le coefficient le plus positif de la fonction économique

Le coefficient de la fonction économique (MAX) est 50. Ainsi il s'agit de la variable y qui rentre en base

↓

	x	y	e ₁	e ₂	e ₃	
e ₁	3	2	1	0	0	1800
e ₂	1	0	0	1	0	400
e ₃	0	1	0	0	1	600
Fonction économique → MAX	30	50	0	0	0	0

4^{ème} étape : Choisir la variable à faire sortir de la base (rapport : second membres / coefficient de la variable choisie). Retenir le plus faible.

Le second membre (les b_i) (encadré vert), nous retenons la valeur la plus faible (en orange) du rapport second membre (en vert)/coefficient de la variable choisie (en bleu clair). Ainsi la variable e₃ est la variable qui sort de la base.

↓

	x	y	e ₁	e ₂	e ₃	2 ^{ème} membre	
e ₁	3	2	1	0	0	1800	1800/2 = 900
e ₂	1	0	0	1	0	400	400/0 = ∞
e ₃	0	1	0	0	1	600	600/1 = 600 ←
MAX	30	50	0	0	0	0	

5^{ème} étape : Encadrer le pivot

Le pivot est égal à 1(encadré en bleu)

	E_{ij}		A_{ij}				
		x	y	e ₁	e ₂	e ₃	2 ^{ème} membre
e ₁		3	2	1	0	0	1800
e ₂		1	0	0	1	0	400
y	Ligne du pivot →	0	1	0	0	1	600
MAX		30	50	0	0	0	0

lignes du pivot pivot

6^{ème} étape : diviser la ligne du pivot par le pivot

	x	y	e ₁	e ₂	e ₃	2 ^{ème} membre
e ₁						
e ₂						
y	0	1	0	0	1	600
MAX						

Annotations: A callout bubble labeled E'ij points to the empty cell at row e1, column x. Another callout bubble labeled 1/pivot points to the cell at row y, column y.

7^{ème} étape : Calculer les valeurs des autres lignes

$$E'_{ij} = E_{ij} - [(A_{ij} / \text{Pivot}) \times \text{Ligne du pivot}]$$

Cette opération consiste à transformer E_{ij} des autres lignes en E'_{ij}, nous effectuons un calcul matriciel

1^{ère} ligne

$$3 = 3 - [(2/1) \times 0]$$

$$0 = 2 - [(2/1) \times 1]$$

$$1 = 1 - [(2/1) \times 0]$$

$$0 = 0 - [(2/1) \times 0]$$

$$-2 = 0 - [(2/1) \times 1]$$

2^{ème} ligne

$$1 = 1 - [(0/1) \times 0]$$

$$0 = 0 - [(0/1) \times 1]$$

$$0 = 0 - [(0/1) \times 0]$$

$$1 = 1 - [(0/1) \times 0]$$

$$0 = 0 - [(0/1) \times 1]$$

4^{ème} ligne

$$30 = 30 - [(50/1) \times 0]$$

$$0 = 50 - [(50/1) \times 1]$$

$$0 = 0 - [(50/1) \times 0]$$

$$0 = 0 - [(50/1) \times 0]$$

$$-50 = 0 - [(50/1) \times 1]$$

$$600 = 1\ 800 - [(2/1) \times 600]$$

$$400 = 400 - [(0/1) \times 600]$$

$$30\ 000 = 0 - [(50/1) \times 600]$$

	x	y	e ₁	e ₂	e ₃	2 ^{ème} membre
1 ^{ère} ligne	3	0	1	0	-2	600
2 ^{ème} ligne	1	0	0	1	0	400
ligne du pivot	0	1	0	0	1	600
4 ^{ème} ligne	30	0	0	0	-50	-30 000

8^{ème} étape : Les coefficients de la fonction économique sont-ils tous nuls ou négatifs ? (si oui nous sommes à l'optimum, sinon nous effectuons un nouveau passage)

Les coefficients de la fonction économique ne sont pas tous nuls ou négatifs (30) il convient d'effectuer un nouveau passage.

Nouveau passage :

Choisir les variables à introduire dans la base. Pour cela choisir le coefficient le plus positif de la fonction économique. Ici c'est 30. Ainsi il s'agit de la variable x qui rentre en base

	x	y	e ₁	e ₂	e ₃	2 ^{ème} membre
e ₁	3	0	1	0	-2	600
e ₂	1	0	0	1	0	400
y	0	1	0	0	1	600
MAX	30	0	0	0	-50	-30 000

- ✓ Choisir la variable à faire sortir de la base (rapport : second membres / coefficient de la variable choisie). Retenir le plus faible.

Le second membre, nous retenons la valeur la plus faible (en orange) du rapport second membre /coefficient de la variable choisie. Ainsi la variable e₁ est la variable à enlever de la base.

	x	y	e ₁	e ₂	e ₃	2 ^{ème} member	
← e ₁	3	0	1	0	-2	600	600/3 = 200
e ₂	1	0	0	1	0	400	400/1 = 400
y	0	1	0	0	1	600	600/0 = ∞
MAX	30	0	0	0	-50	-30 000	

- ✓ Le pivot est égal à 3
- ✓ diviser la ligne du pivot par le pivot : 3
- ✓ Calculer les autres de valeur des lignes

2 ^{ème} ligne	3 ^{ème} ligne	4 ^{ème} ligne
0 = 1 - [(1/3) x 3]	0 = 0 - [(0/3) x 3]	0 = 30 - [(30/3) x 3]
0 = 0 - [(1/3) x 0]	1 = 1 - [(0/3) x 0]	0 = 0 - [(30/3) x 0]
- 1/3 = 0 - [(1/3) x 1]	0 = 0 - [(0/3) x 1]	- 10 = 0 - [(30/3) x 1]
1 = 1 - [(1/3) x 0]	0 = 0 - [(0/3) x 0]	0 = 0 - [(30/3) x 0]
2/3 = 0 - [(1/3) x -2]	1 = 1 - [(0/3) x -2]	- 30 = -50 - [(30/3) x -2]
200 = 400 - [(1/3) x 600]	600 = 600 - [(0/3) x 600]	- 36 000 = -30 000 - [(30/3) x 600]

		x	y	e ₁	e ₂	e ₃	2 ^{ème} membre
ligne du pivot	x	1	0	1/3	0	-2/3	200
2 ^{ème} ligne	e ₂	0	0	-1/3	1	2/3	200
3 ^{ème} ligne	y	0	1	0	0	1	600
4 ^{ème} ligne	MAX	0	0	-10	0	-30	-36 000

Les coefficients de la fonction économique sont tous nuls ou négatifs, fin de l'algorithme du simplex. La solution qui rend optimal le programme est la suivante :
La marge sur la fonction économique maximum = 36 000, les quantités produites x = 200, y = 600, et on constate que la variable d'écart e₂ n'est pas saturée. Par contre les variables d'écart e₁ et e₃ sont saturées.