Abdelhafid Boussouf University Center- Mila
Institute of Science and Technology
Common Core ST Department
Module: Analysis 1

Academic Year: 2025/2026
1st Year Common Core ST
And 1st Year Engineering
Semester I

Analysis I: Tutorial Exercise Sheet 1

Exercise 01:

Prove that the set of rational numbers forms a field. (برهن أن مجموعة الأعداد الناطقة تشكل حقلا.)

Exercise 02:

Rewrite the sets S below using interval notation:(أعد كتابة المجموعات S في الأسفل باستعمال ترميز المجالات:)

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}, \quad S_2 = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 2\}, \quad S_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 3\},$$
$$S_4 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}, \quad S_5 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}, \quad S_6 = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$$

Exercise 03:

A) Show the following inequalities: (بيّن المتراجحات التالية:)

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
3. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}; \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

B) Let $[x]$ be the floor function of x; (لتكن $[x]$ دالة الجزء الصحيح لـ x ،)

- find the following: $[3.6], [\pi], [e], [-5.3], [-0.4], [8]$. (أوجد ما يلي)
- Demonstrate that for all $x, y \in \mathbb{R}$: (برهن أنه من أجل كل x و y ينتميان إلى $\mathbb{R}$:)
  1. $[x + m] = [x] + m$ where $m \in \mathbb{Z}$
  2. $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.
  3. $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

Exercise 04:

A) Show that: (بيّن أن:)

1. The sum of a rational number and an irrational number is an irrational number.
   1. مجموع عدد ناطق (نسبوي) و عدد أصم (غير نسبوي) هو عدد أصم (غير نسبوي) .
2. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

B) Let $a \in [1, \infty[$ simplify x^2 where $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.
ليكن $a \in [1, \infty[$ بسط x^2 حيث $x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

Exercise 05:

Consider A as a subset of $\mathbb{R}$ equipped with the usual order. Determine, for each of the following sets: the set of upper bounds $Maj(A)$, the set of lower bounds $Min(A)$, the supremum $\sup(A)$, the infimum $\inf(A)$, the smallest element $\min(A)$, and the largest element $\max(A)$.

نعتبر A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ مزودة بالترتيب الاعتيادي. طُلِب تحديد ما يلي بالنسبة إلى كل مجموعة معطاة: مجموعة الحدود العليا $Maj(A)$ ، مجموعة الحدود السفلى $Min(A)$ ، الحد الأدنى الأعلى (أي أصغر الحدود العليا) $\sup(A)$ ، الحد الأعلى الأدنى (أي أكبر الحدود السفلى) $\inf(A)$ ، أصغر عنصر في A أي $\min(A)$ ، وأكبر عنصر في A أي $\max(A)$.

1. $A = [-\alpha, \alpha], [-\alpha, \alpha[,]-\alpha, \alpha[$ (where $\alpha > 0$), $E = \mathbb{R}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 2\}, E = \mathbb{R}$.
3. $A = \{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}, E = \mathbb{R}$.

Exercise 06:

Let A be a non-empty and bounded subset of $\mathbb{R}$. We denote $B = \{|x - y|; (x, y) \in A^2\}$.

لتكن A مجموعة جزئية غير فارغة و محصورة في $\mathbb{R}$. نرمز $B = \{|x - y|; (x, y) \in A^2\}$.

1. Justify that B is bounded above.(علل كون B محصورة (محدودة) من الأعلى.)
2. We denote $\sup(B)$ as the supremum of the set B, show that $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

2. نرمز لأصغر الحدود العلوية للمجموعة B بـ $\sup(B)$. أثبت أن $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercise 07

Notation: $P_B(\mathbb{R})$ denotes the set of bounded subsets of $\mathbb{R}$. Show that for all $A, B \in P_B(\mathbb{R})$:

الرمز $P_B(R)$ يمثل مجموعة المجموعات الجزئية المحدودة في $\mathbb{R}$. برهن أنه من أجل كل A و B ينتميان لـ $P_B(\mathbb{R})$:

(1) (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
(b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

(2) If $A \cap B \neq \emptyset$ then:
(a) $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$,
(b) $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.

(3) (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
(b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,
where $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$.

(4) (a) $\sup(-A) = -\inf A$,
(b) $\inf(-A) = -\sup A$,
where $-A = \{-x : x \in A\}$.

Exercise 08:

Using the characterization of the supremum and infimum, show that:

باستعمال مميزة أصغر الحدود العلوية و أكبر الحدود السفلية، بين أن:

1. $\sup A = \frac{3}{2}, \inf A = 1 \ for \ A = \{\frac{3n+1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
2. $\sup B = 2,\ \inf B = 0 \ for \ B = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}$.
3. $\sup C = 1, \inf C = 0 \ for \ C = \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$.
4. $\sup D = -1, \inf D = -2 \ for \ D = \{\frac{1}{n^2} - 2, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Calculate $\max A$, $\min A$, $\max B$, $\min B$, $\max C$, $\min C$, and $\max D$, $\min D$ if they exist.

أحسب $\max A$ ، $\min A$ ، $\max B$ ، $\min B$ ، $\max C$ ، $\min C$ ، و $\max D$ ، $\min D$ إن وجدوا.