Centre universitaire Abedelhafid Boussouf – Mila
Institut des sciences et technologie
Département de mathématiques et informatique
1[er] année Master : Intelligence artificielle et ses applications – Année: 2024-2025
Matière : Modélisation et simulation

Solution de TD 1

Exercice 1. :

1. Soit une chaîne de Markov à 2 états de matrice de transition $\mathbb{P}$ telle que $p_{12} = 0,25$ et $p_{21} = 0,5$. Calculer l'image π_1 par la chaîne de Markov de la distribution initiale $\pi_0 = (0,2 \quad 0,8)$.

$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} ? & 0,25 \\ 0,5 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ car la somme des éléments d'une ligne vaut 1.

$\pi_1 = (0,2 \quad 0,8) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,2 \times 0,75 + 0,8 \times 0,5 \quad 0,2 \times 0,25 + 0,8 \times 0,5)$

$\boxed{\pi_1 = (0,55 \quad 0,45)}$ On remarque que la somme des éléments de π_1 vaut 1 (comme celle de π_0).

2. Calculer le nombre α tel que $\pi_0^* = (\alpha \quad (1-\alpha))$ soit une distribution stationnaire. En déduire que $\lambda = 1$ est une valeur propre à gauche de la matrice $\mathbb{P}$. Expliquer.

On cherche α tel que $\pi_0^*\mathbb{P} = \pi_0^*$, soit $(\alpha \quad (1-\alpha)) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (\alpha \quad (1-\alpha))$

donc $(0,75\alpha + 0,5(1-\alpha) \quad 0,25\alpha + 0,5(1-\alpha)) = (0,25\alpha + 0,5 \quad -0,25\alpha + 0,5) = (\alpha \quad (1-\alpha))$

On doit résoudre le système $\begin{cases} 0,25\alpha + 0,5 & = \alpha \\ -0,25\alpha + 0,5 & = 1-\alpha \end{cases}$ qui se réduit à l'équation $0,75\alpha = 0,5$

donc $\boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$ et $\pi_0^* = (\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$. On peut vérifier que $(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = (\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$

donc $(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3})$ est un vecteur propre à gauche de la matrice $\mathbb{P}$ associé à la valeur propre 1.

3. Calculer le carré $\mathbb{P}^2$, puis les deux produits $\pi_0\mathbb{P}^2$ et $\pi_1\mathbb{P}$.

Exercice 2

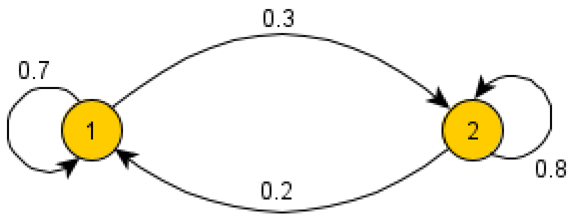
$(X_n)_{n>0}$ est une chaîne de Markov, dont l'ensemble des états est $E = \{1,2\}$. (1 : il pleut, 2 : il ne pleut pas)

X_n est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 s'il pleut après n jour et la valeur 2 s'il ne pleut pas après n jours.

Matrice de transitions :

$\text{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

Graphe de la chaine de Markov :



Il pleut aujourd'hui, donc :

$$\pi_0 = (1 \quad 0)$$

La probabilité qu'il pleut dans 2 jours :

Solution 1 :

$p_{1,1}^{(2)} = \mathrm{P}_{1,1} \times \mathrm{P}_{1,1} + \mathrm{P}_{1,2} \times \mathrm{P}_{2,1}$=0.7×0.7+0.3×0.2=0.55

Solution 2:

$$\pi_2 = \pi_0 P^2 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^2 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = (0.55 \quad 0.45)$$

- La probabilité qu'il pleut dans 2 jours égale à 0.55
- La probabilité qu'il ne pleut pas dans 2 jours égale à 0.45

La probabilité qu'il pleut dans 5 jours :

$$\pi_5 = \pi_0 P^5 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^5 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}419 & 0{,}581 \\ 0{,}388 & 0{,}613 \end{pmatrix} = (0.419 \quad 0.581)$$

- La probabilité qu'il pleut dans 5 jours égale à 0.419
- La probabilité qu'il ne pleut pas dans 5 jours égale à 0.581

La chaine est irréductible, en fait, les deux états 1 et 2 communiquent ($1 \leftrightarrow 2$)

La chaine est irréductible, donc, sa période= à la période de chacun de ses états (les états ont la même période)

$$\mathbf{d(0)} = \boldsymbol{PGCD\{n \geq 1 \mid p_{0,0}^{n} > 0\}} = \boldsymbol{PGCD\{2 \times i \mid i \neq 0\}} = \mathbf{2}$$

Donc la chaine est périodique, de période égale à 2