Examen de rattrapage

Transfert de chaleur et de masse approfondi

Durée : 1 h 30 mn

Exercice n°1 (4 points)

Si la fraction molaire $x_A(z)$ de l'espèce A vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dx_A(z)}{dz}-\left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right)x_A(z)=-\frac{N_{Az}}{cD_{AB}}$$

Trouver l'équation différentielle que doit vérifier la fraction molaire $x_B(z)$ de l'espèce B dans le système binaire (A, B).

Exercice n°2 (6 points)

Le pouvoir émissif spectral d'un corps noir en fonction de la fréquence ν et de la température absolue T est donné par la formule de Planck

$$E_b(\nu,T)=\frac{2\pi h}{c^2}\nu^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^{-1}$$

où $c=2{,}9979.10^8\ ms^{-1}$ est la vitesse de la lumière dans le vide, $h=6{,}6256.10^{-34}\ J.s$ est la constante de Planck et $k=1{,}38065.10^{-23}\ J.K^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

a) En écrivant l'expression du pouvoir émissif spectral d'un corps noir sous la forme

$$E_b(\nu,T)=A\nu^3\left(e^{B\frac{\nu}{T}}-1\right)^{-1}$$

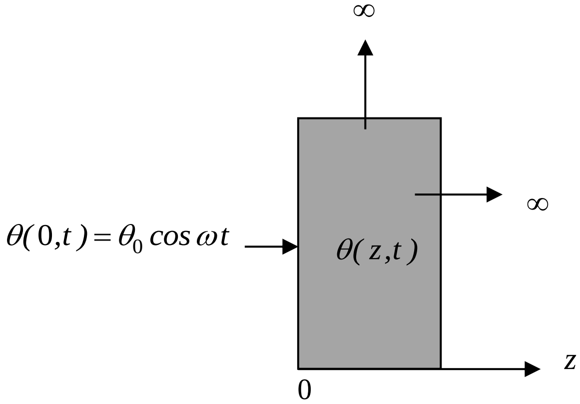
calculer les valeurs numériques des constantes A et B.

b) Trouver les expressions de $E_b(\nu,T)$ dans les cas :

1) $B\nu \prec\prec T$
2) $B\nu \succ\succ T$.

Exercice n°3 (10 points)

Sachant que la variation de la température à la surface ($z=0$) d'un solide de diffusivité thermique D est $\theta(0,t)=\theta_0 \cos\omega t$,



a) Ecrire l'équation de Fourier pour la température $\theta(z,t)$,
b) Chercher la solution sous la forme $\theta(z,t) = F(z)e^{i\omega t}$,
c) Calculer les constantes d'intégration en écrivant des conditions aux limites appropriées,
d) Interpréter la solution obtenue.

Corrigé type de l'examen de rattrapage

Transfert de chaleur et de masse approfondi

Durée : 1 h 30 mn

Exercice n°1 (4 points)

Comme la fraction molaire $x_A(z)$ de l'espèce A vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dx_A(z)}{dz}-\left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right)x_A(z)=-\frac{N_{Az}}{cD_{AB}}$$

et sachant que

$$x_A(z)=1-x_B(z) \quad \boxed{1.0}$$

nous obtenons

$$-\frac{dx_B(z)}{dz}-\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}+\left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right)x_B(z)=-\frac{N_{Az}}{cD_{AB}} \quad \boxed{1.0} \quad \boxed{1.0}$$

$$-\frac{dx_B(z)}{dz}-\frac{N_{Az}}{cD_{AB}}-\frac{N_{Bz}}{cD_{AB}}+\left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right)x_B(z)=-\frac{N_{Az}}{cD_{AB}}$$

soit

$$\frac{dx_B(z)}{dz}-\left(\frac{N_{Az}+N_{Bz}}{cD_{AB}}\right)x_B(z)=-\frac{N_{Bz}}{cD_{AB}} \quad \boxed{1.0}$$

Exercice n°2 (6 points)

a) En écrivant l'expression du pouvoir émissif spectral d'un corps noir sous la forme

$$E_b(\nu,T)=A\nu^3\left(e^{B\frac{\nu}{T}}-1\right)^{-1}$$

nous remarquons que $A=\frac{2\pi h}{c^2}$ et $B=\frac{h}{k}$. Leurs valeurs numériques sont :

$$A=\frac{2\times 3{,}14\times 6{,}6256.10^{-34}}{\left(2{,}9979.10^{8}\right)^2}=4{,}6296.10^{-50}W.m^{-2}.s^4 \quad \boxed{1.0}, \quad B=\frac{6{,}6256.10^{-34}}{1{,}38065.10^{-23}}=4{,}7988.10^{-11}s.K \quad \boxed{1.0}$$

b) A partir de la relation $E_b(\nu,T)=A\nu^3\left(e^{B\frac{\nu}{T}}-1\right)^{-1}$ nous avons

1) Pour $B\nu \prec\prec T$, nous avons $B\frac{\nu}{T}\prec\prec 1$, par conséquent

$$E_b(\nu,T)=A\nu^3\left(B\frac{\nu}{T}+1-1\right)^{-1}=\frac{A}{B}\nu^2 T \quad \boxed{2.0}$$

2) Pour $B\nu \succ\succ T$, nous avons $B\frac{\nu}{T} \succ\succ 1$, d'où

$$E_b(\nu, T) = A\nu^3 e^{-B\frac{\nu}{T}}$$ 2.0

<u>Exercice n°3</u> (10 points)

1) L'équation de Fourier pour la température $\theta(z,t)$ est

$$\frac{1}{D}\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta(z,t)}{\partial z^2}$$ 1.0

2) Conditions aux limites

$$z = 0,\ \theta(0,t) = \theta_0 \cos\omega t$$ 0.5

$$z = \infty,\ \theta(z,t) = Finie$$ 0.5

3) Substituons la solution $\theta(z,t) = F(z)e^{i\omega t}$ dans l'équation de Fourier, nous obtenons

$$\frac{i\omega}{D}F(z)e^{i\omega t} = F''(z)e^{i\omega t}$$

soit

$$F''(z) - \frac{i\omega}{D}F(z) = 0$$

la solution de cette équation différentielle ordinaire est

$$F(z) = Ae^{z\sqrt{\frac{i\omega}{D}}} + Be^{-z\sqrt{\frac{i\omega}{D}}}$$

$$\theta(z,t) = \left(Ae^{z\sqrt{\frac{i\omega}{D}}} + Be^{-z\sqrt{\frac{i\omega}{D}}}\right)e^{i\omega t}$$ 1.0

mais comme la température doit être finie pour $z = \infty$, la constante A doit être nulle 0.5,

et sachant que $(i\omega)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2}}$ 0.5, nous obtenons

$$\theta(z,t) = Be^{-z\sqrt{\frac{i\omega}{D}}}e^{i\omega t} = Be^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}e^{-zi\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}e^{i\omega t} = Be^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}e^{i\left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right)}$$

4) La partie réelle de cette solution est

$$\theta(z,t) = Be^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}\cos\left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right)$$ 1.0

À partir de la première condition aux limites, nous avons

$$\theta(0,t) = B\cos\omega t = \theta_0 \cos\omega t$$

$$B = \theta_0$$ 0.5

ainsi

$$\theta(z,t) = \theta_0 e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right) \quad \boxed{1.0}$$

En conclusion, la température du sol a une amplitude qui est amortie par le terme $e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}$ et elle est déphasé par rapport à la température $\theta(0,t) = \theta_0 \cos \omega t$ d'un angle égal à $z\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$. $\boxed{3.5}$