مشكلة عدم ثبات تباين التجانس

Proplem Hetroscadasticity

مشكلة عدم ثبات تجانس التباين Hetroscadasticity problem

سبق أن تم الإشارة إلى فروض المتغير العشوائي على أن تباين المتغير يجب أن يكون متجانسًا في المجتمعات الفرعية حتى يكون تباينه في المجتمع الإحصائي ككل متجانسًا وأي خلاف حول هذا المنطق سيؤدي إلى خرق للفرضية المنوه عنها سلفا، وتحصل مشكلة تسمى بمشكلة عدم ثبات تباين التجانس أي أن:

$$E(UiUj) \neq 0 \dots \dots i \neq j \dots (i,j = 1,2,3 \dots \dots n)$$

$$E(Ui^2) = oui^2$$

$$ou1^2 \neq ou2^2 \neq ou3^2 \neq \cdots \dots \dots \neq oun^2$$

وبالتالي فإن التشوه في التقدير حاصل لامحالة ولا يمكن الاعتداد بنتائج التقديرات لاتخاذ قرارات اقتصادية أو مصيرية أو القيام بالتنبؤ المستقبلي لعدم صحة هذه التقديرات.

إن هذه المشكلة غالبا ما تحدث في النماذج التي تعتمد على البيانات المقطعية cross-section وفي بيانات ذات نوع يكون فيه التفاوت كبيرا، مما يؤدي إلى تفاوت تباين الخطأ العشوائي، بحيث تارة يكون كبيرا وتارة أخرى يصبح صغيراً، ويمكن أن تحدث هذه في بيانات الاتفاقات الأسرية أو ما يسمى انفاق العوائل إلى السلع الغذائية، إذ ينصب كل دخول العوائل المتدنية الدخل على السلع الضرورية بينما تختلف الأسر ذات الدخل المتوسط والعالي عن تواجهات الاتفاق عن الأسر ذات الدخل المنخفض، مما يجعل هذه البيانات متفاوتة بشكل كبير وهذه الحالة ستؤدي إلى ما يأتي (عدنان داوي، 2010، صفحة 107):

$$E(Ui^2) \neq oui^2$$

$$E(UiUj) \neq 0$$

$$E(U'U) \neq oui^2 In$$

مما يشكل خرقا واضحا كما أسلفنا للفرضية، وبالتالي لا يمكن من تقديرها بالطريقة المعهودة طريقة المربعات الاعتيادية لأنه لا يكون تقديرا غير متحيز وبالتالي يستوجب تقديرها بطرق أخرى، إلا أن من البديهي أن نعرف أن البيانات هي أساس هذه المشكلة، لذا يستوجب تنقيتها من القيم الشاذة والتي قد تسبب مشكلة أخرى عندما يتم تقدير النموذج بالطرق الأخرى ويمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى المعممة (GLS Generalized least squares method)

وكما يأتي:

يتم تنقية البيانات باستخدام ما يعرف بـــ: معكوس مصفوفة اوميغا Ω^{-1} والتي يمكن الحصول عليها من المصفوفة المعروفة بالرمز P وتساوي:

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\lambda 1}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{\lambda 2}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{\lambda 3}}\end{bmatrix}$$

ومن ثم نحصل على معكوسها وكما يأتي:

$$P-1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{\lambda 1}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{\lambda 2}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{\lambda 3}}\end{bmatrix}$$

ومن ثم نقوم بضرب المصفوفة بمقلوبها لتصبح كما يأتي :

$$P'P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda 1}\ldots 0 \ldots..0 \ldots\ldots\ldots..0\\ 0 \ldots..\frac{1}{\lambda 1}\ldots.0 \ldots\ldots\ldots 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\\ 0 \ldots\ldots.0 \ldots 0 \ldots\ldots\frac{1}{\lambda 1}\end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة تعرف بمصفوفة أوميغا Ω وإن معكوسها يصبح كما يأتي:

$$(P'P)^{-1}=P\quad P^{-1}\begin{bmatrix}\lambda 1 \ldots\ldots.0 \ldots\ldots..0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0\\ 0 \ldots..\lambda 2 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..0\\ 0 \ldots\ldots 0 \ldots.0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\lambda n\end{bmatrix}=\Omega^{-1}$$

وعليه أصبح من الممكن أن نشتق صيغة طريقة المربعات الصغرى المعممة كما يأتي :-

$$y=XB+U$$

$$U=-XB$$

نضرب طرقي المعادلة P^{-1} : $\quad P^{-1}U=P^{-1}Y-P^{-1}XB$

تربع المعادلة :

$$(P^{-1}U)(P^{-1}U)=(P^{-1}Y-P^{-1}XB)(P^{-1}Y-P^{-1}XB)$$

$$P^{-1}U'UP^{-1}=(Y'P^{-1}-X'B'P^{-1\prime})(YP^{-1}-XBP^{-1})$$

$$P^{-1}U'UP^{-1} = Y'P^{-1'}YP^{-1} - Y'^{P^{-1'}} - XBP^{-1} - X'B'P^{-1'}YP^{-1}$$
$$+ X'B'P^{-1'}XBP^{-1}$$
$$Y'P^{-1'}XBP^{-1} = X'B'P^{-1'}YP^{-1} \dots P^{-1}P^{-1} = \Omega^{-1}.$$
$$(U^{-1}\Omega^{-1}U) = Y'\Omega^{-1}Y - 2X'B'\Omega^{-1}Y + X'B'\Omega^{-1}XB$$

نأخذ الاشتقاق الجزئي الأول لمربعات البواقي بالنسبة إلى مقلوب موجه المعالم:

$$\frac{\partial(U^{-1}\Omega^{-1}U)}{\partial B'} = -2X'\Omega^{-1}Y + 2X'\Omega^{-1}XB = 0$$

نقسم طرفي المعادلة على 2:

$$\frac{\partial(U^{-1}\Omega^{-1}U)}{\partial B'} = -X'\Omega^{-1}Y + (X'\Omega^{-1}X)B = 0$$

وهي صيغة تقدير طريقة المربعات الصغرى المعممة.

$$\therefore B = \frac{X'\Omega^{-1}Y}{(X'\Omega^{-1}X)}$$
$$B = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$$

وهي صيغة تقدير طريقة المربعات الصغرى المعممة.

أما صيغة التباين والتباين المشترك، فمن صيغة التباين السالفة الذكر في طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية والتي تأخذ الشكل الآتي :

$$vae - cov(b) = E[b - E(b)]^2$$
$$\therefore E(b) = B$$

ومن صيغة طريقة المربعات المعممة الأنفة الذكر:

$$[b] = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y$$
$$\because Y = XB + U$$
$$\therefore [b] = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}(XB + U)$$
$$[b] = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\mathrm{XB} + (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}U$$
$$\because (X'\Omega^{-1}X)^{-1} = X'\Omega^{-1}X = 1$$
$$\therefore [b] = IB + (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}U$$
$$[b] = B + (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}U$$
$$[b - B] = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}U$$
$$\because var - cov[b] = E[b - B]^2$$
$$\because var - cov[b] = E[((X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}U)/(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}U]$$

$$var - cov[b] = [((X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}U)/(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}U]$$

$$\therefore (X'\Omega^{-1}X)^{-1} = X'\Omega^{-1}X = I \ldots . U(U = ou^2$$

$$\therefore var - cov[b] = ou^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

وعند مقارنة تباينات الطريقة المعممة بالطريقة الاعتيادية لاستبيان الطريقة الأكفأ في التقدير ووفقا لما يأتي:

$$\frac{var(\ddot{b})inGLS}{var(\ddot{b})inOLS} = 1 , > 1, < 1$$

فاذا كانت النتيجة تساوي 1 فيعني أن الطريقتين متساويتين في الكفاءة، أما إذا كانت النتيجة أقل من الواحد الصحيح فيعني هذا أن طريقة المربعات الصغرى المعممة أكفأ من الطريقة الاعتيادية، وأما إذا كانت النتيجة أكبر من الواحد الصحيح فالطريقة الاعتيادية أكفأ من الطريقة المعممة.

اختبار وجود مشكلة عدم ثبات تجانس التباين :

هناك طرق عدة للكشف عن وجود أو عدم وجود المشكلة في النموذج المقدر ومن هذه الاختبارات وأكثرها شهرة:

1- اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان Spearman Rank correlation coefficient

إذ يعتبر هذا الاختبار من أفضل الاختبارات من حيث السهولة والشمولية لكل النماذج المقدرة البسيطة والمتعددة . ويمكن تطبيق هذا الاختبار كما باتي:-

- يتم تقدير نموذج الانحدار بالطريقة التي أشرتا إليها وهي طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية.
- يحتسب قيم التغيير التابع المقدر Ẏ بواسطة إدخال قيم المتغير المستقل للحصول على هذا العمود.
- يطرح العمود المقدر من عمود القيم الحقيقية لـ Ẏ لاحتساب قيم المتغير العشوائي $UI = YI - \dot{Y}I$
- ترتب قيم المتغير العشوائي أو البواقي ترتيبا إما تصاعديا أو تنازليا مع المتغيرالمستقل .
- نحتسب الفرق ما بين العمودين وذلك بطرح عمود من العمود الآخر ولا يشترط أن يكون عمودا معينا ويوضع الفرق في عمود يرمز له Di .
- تربع القيم في عمود Di وتوضع في عمود آخر Di^2 وتجمع القيم $\sum \mathrm{Di}^2$ وهو مجموع مربعات الفروق.

للحصول على المعامل يتم من خلال الصيغة الآتية:

$$rex = 1 - \frac{3\sum \mathrm{Di}^2}{n(n^2-1)}$$

$$rex = Spearman\ coefficient$$

$$n = sample\ size$$

والنتيجة المرتقبة من تطبيق الصيغة أعلاه تنحصر قيمتها ما بين الصفر والواحد الصحيح ، فكلما اقتربت قيمة معامل ارتباط الرتب من الواحد الصحيح دل ذلك على وجود علاقة قوية ما بين قيم البواقي وقيم المتغير المستقل وبالتالي إلى وجود مشكلة عدم ثبات تجانس التباين والعكس صحيح .

2- اختبار بارتليت Bartlett test:

يقوم هذا الاختبار على احتســاب تباين الخطأ العشــوائي auit فعندماoui^2 ، فعندما يكون هذا التباين ثابتا في المجتمعات الفرعية من المجتمع الإحصـــائي برمته يعني ذلك ثبات تجانس التباين وبطيعة الحال في الإحصـــاء فإنها تخضع للفرضيات التي تم ذكرها سلفا؛ وهما فريضة العدم والفرضية البديلة، إذ أن فرضية العدم HO تدل على ثبات تجانس التباين والفرضية البديلة $H1$ تدل على عدم ثبات تجانس التباين أي أن:

Ho: oul2 = ou22 = ou3.. Hl: oulou22 ou32..

$$H0:\ \mathrm{ou}1^2 = ou2^2 = ou\ 3^2 \ldots\ldots\ldots\ldots = ou\ n^2$$

$$H1:\ \mathrm{ou}I^2 \neq ou2^2 \neq ou\ 3^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \neq ou\ n^2$$

ويكون الاختبار ذا جودة عالية عندما تكون البيانات يتوافر فيها الآتي:

أ - عندما تكون قيم المتغير المستقل مختلفة بعضها عن البعض الآخر.

ب - عندما تكون هناك مستويات رئيسة وأخرى ثانوية مثال ذلك بيانات الأسر ولغرض إجراء الاختبار يتبع مابلي:

- تقسم البيانات إلى أجزاء ولتكن m من الأجزاء، وكل جزء يحتوي علـى عـدد من العينات N.
- يقدّر تباين الخطأ العشوائي $\mathrm{ou}i^2$ لكل عينة.

إيجاد قيم كل من L ، Q والتي تأخذ الصيغ الآتية (عدنان داوي، 2010، صفحة 112) :-

$$Q = N\log\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} nioui^2}{N}\right) - \sum_{i=1}^{m} ni\log oui^2$$

$$L = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{ni} - \frac{1}{N}\right)$$

N عدد العينات الكلي (جميع العينات في كل أجزاء العينة المقسمة).

ni حجم العينة المجزأة.

Log = اللوغارتيم الطبيعي أساس 10.

4- يحتسب اختبار بارتليت كما يأتي: Q/I.

والقيمة الناتجة تتقارب مع توزيع (كاي سكويرز $\chi^2 n - 1$) أي تختبر بحسب جدول كاي سكويرز بدرجة حرية ($\mathrm{m} - 1$) ومســتوى معنوية معين فإذا كانت القيمة المحســوبة لاختبار بارتليت أقل أو تســاوي الجدولية عند ذلك المستوى من المعنوية تقبل فرضية العدم بوجود ثبات تجانس التباين ، أما إذا كانت القيمة المحتسبة أكبر من الجدولية فيعني ذلك أن تباين الخطأ المحتســـب للعينات الجزئية غير متجانس يدل على أن تلك العينات تعود إلى مجتمع واحد وليس إلى مجتمعات فرعية .

3- اختبار كولد فيلد كوانت Goldfeld& Quandt test

يقوم هذا الاختبار على الآتي:-

A-ترتب قيم المتغير المستقل Xi ترتيبا تصاعديا

B- يتم حذف القيم الوسطية من قيم المتغير المستقل التي تم ترتيبها بواقع 8-9 عينات في حالة كون حجم العينة تبلغ نحو 30 عينة وبواقع 16-18 عينة في حالة حجم العينة الكلي يبلغ نحو 60 عينة.

C-تقسم العينة الباقية إلى قسمين رئيسيين يمثل القسم الأول من البيانات القيم المنخفضة والقسم الثاني القيم المرتفعة.

D - يقدر نموذج الانحدار لكل قسم على حدة .

E - يحتسب تباين الخطأ العشوائي (مجموع مربعات الخطأ العشوائي aui^2 لكل تقدير ووفقا للصيغة الآتية:

$$ou1^2 = \frac{\sum_{I=}^{T1} UiI^2}{T1-2} \ldots\ldots ou2^2 = \frac{\sum_{I=}^{T2} Ui2^2}{T2-2}$$

$T1$، $T2$: حجم العينة الكلي للقسمين الأول والثاني.

2: عدد المعالم في النموذج

F - يحتسب اختبار] وفقا للصيغة الآتية : $F = \frac{ou\ 2^2}{ou1^2}$

ويتم مقارنة القيمة المحتسبة لاختبار F وفقا للصيغة أعلاه مع القيم الجدولية عند مستوى المعنوية المعين وبدرجة حرية $Ti-2$ فإذا كانت القيمة المحتسبة أقل من القيمة الجدولية فنقبل فرضية العدم HO ويدل ذلك على تباين متجانس والعكس الصحيح .