

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE :::::
FACULTE DES :::::
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Filière
Mathématiques

ESPACES VECTORIELS NORMES

Année Universitaire : 2022-2023.

Introduction	3
1 ESPACES NORMÉS	5
1.1 Espaces vectoriels normés	5
1.1.1 Norme	5
1.1.2 Quelques exemples usuels	7
1.1.3 Espaces de Banach	11
1.1.4 Applications linéaires	13
1.1.5 Normes équivalentes	15
1.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie	16
1.2.1 Equivalence des normes	16
1.2.2 Compacité des boules	17
2 ESPACES DE HILBERT	19
2.1 Généralités	19
2.1.1 Définitions	19
2.2 Propriétés élémentaires	20
2.2.1 Orthogonalité	22
2.2.2 Espaces de Hilbert	22
2.3 Le Théorème de projection et ses conséquences	23
2.3.1 Le Théorème de projection	23
2.3.2 Conséquences	24
2.3.3 Représentation du dual	27
2.3.4 Adjoint d'un opérateur	28
2.4 Bases orthonormées	29
2.4.1 Espaces séparables	29
2.4.2 Systèmes orthonormés	30
2.4.3 Bases orthonormées	32
2.4.4 Existence des bases orthonormées	33

2.5	Séparabilité de $L^2(0, 1)$	34
2.5.1	Théorème de Stone-Weierstrass	34
2.5.2	Cas complexe	38
2.5.3	Le système trigonométrique	39
Bibliographie		43

CHAPITRE 1

ESPACES NORMÉS

Dans ce chapitre d'introduction, on donnera quelques généralités sur les espaces normés abstraits, avec des exemples, et on traitera le cas des espaces de dimension finie. C'est essentiellement un rappel des cours de Licence. Ce sera aussi l'occasion de fixer certaines notations.

1.1 Espaces vectoriels normés

1.1.1 Norme

Définition 1.1.1. Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. une norme sur E est une application, le plus souvent notée $\|\cdot\|$:

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

ayant les trois propriétés suivantes :

1. a) $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in E$ et b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité) ;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Si on supprime le 1) b), on dit que $\|\cdot\|$ est une semi-norme. Notons qu'alors 2) entraîne néanmoins que $\|0\| = 0$.

À partir d'une norme, on obtient une distance sur E en posant $d(x, y) = \|x - y\|$.

On définit alors les :

- boules ouvertes : $\overset{\circ}{B}(x, r) = \{y \in E; \|x - y\| < r\}$;
- boules fermées : $B(x, r) = \{y \in E; \|x - y\| \leq r\}$,

ce qui permet de définir une topologie sur E ; une partie A de E est ouverte (et on dit aussi que A est un ouvert de E) si pour tout $x \in A$ il existe une boule centrée en x , de rayon $r = r_x > 0$, contenue dans A . Il n'y a pas besoin de préciser s'il s'agit d'une boule ouverte ou d'une boule fermée. En effet, si A contient la boule fermée $B(x, r)$, elle contient a fortiori la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$; et, inversement, si A contient la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$, elle contient la boule fermée $B(x, r')$, pour tout $r' < r$. Notons que l'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert (puisqu'il n'y a aucun x dans A , la propriété définissant les ouverts est trivialement vérifiée). L'espace E tout entier est clairement un ouvert. Il résulte de la définition que toute réunion d'ouverts est un ouvert. Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert : si

$x \in A = A_1 \cap \dots \cap A_n$, et $\overset{\circ}{B}(x, r_k) \subseteq A_k$, alors $\overset{\circ}{B}(x, r) \subseteq A$, avec $r = \min(r_1, \dots, r_n)$

Une partie V contenant le point $x_0 \in E$ est un voisinage de x_0 si elle contient une boule (ouverte ou fermée) de centre x_0 , de rayon $r > 0$.

Une partie est fermée (on dit aussi que c'est un fermé) si son complémentaire est ouvert. Par complémentation, on obtient que $\emptyset$ et E sont des fermés, que l'intersection de toute famille de fermés est encore un fermé, ainsi que toute réunion d'un nombre fini de fermés.

Si $A \subseteq E$ est une partie de E , on appelle intérieur de A , et on note $\overset{\circ}{A}$, ou $\text{int}(A)$, le plus grand ouvert contenu dans A (c'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A), et on appelle adhérence, ou fermeture, de A le plus petit fermé contenant A (c'est l'intersection de tous les fermés contenant A). On note $\bar{A}$ l'adhérence de A . On rappelle (c'est facile à voir) que $x \in \bar{A}$ si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x . On dit que A est dense dans E si $\bar{A} = E$.

Proposition 1.1.1. *Toute boule ouverte est un ouvert et toute boule fermée est un fermé.*

Preuve. 1) Soit $x \in \overset{\circ}{B}(x_0, r_0)$ et soit $0 < r < r_0 - \|x - x_0\| > 0$. Pour $\|x - y\| \leq r$, on a $\|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| \leq r + \|x - x_0\| < r_0$; donc $B(x, r) \subseteq \overset{\circ}{B}(x_0, r_0)$.
2) Soit $x \notin B(x_0, r_0)$ et soit $0 < r < \|x - x_0\| - r_0$; alors $B(x, r) \subseteq [B(x_0, r_0)]^c$, puisque, si $\|y - x\| \leq r$, on a $\|y - x_0\| \geq \|x_0 - x\| - \|x - y\| \geq \|x_0 - x\| - r > r_0$. ■

Toutes les notions topologiques précédentes ne font pas intervenir le fait que E soit un espace vectoriel, ni que la distance est définie à partir d'une norme; elles sont donc valables dans tout espace métrique. Par contre, on a une propriété spécifique dans les espaces normés, qui justifie la notation des boules ouvertes : l'intérieur de $B(r, r)$ est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$ et l'adhérence de la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$ est la boule fermée $B(x, r)$ (voir ci-dessous).

Définition 1.1.2. *Lorsqu'un espace vectoriel E est muni d'une norme et de la topologie associée à cette norme, on dit que c'est un espace vectoriel normé, ou, plus simplement, un espace normé.*

Notation. On notera par B_E la boule fermée $B(0, 1)$ de centre 0 et de rayon 1.
On dira que c'est la **boule unité** de E . ■

Proposition 1.1.2. *Si E est un espace normé, alors les applications :*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \text{et} & & \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y & & & (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

sont continues.

Définition 1.1.3. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, muni d'une topologie. On dit que E est un espace vectoriel topologique (e.v.t.) si les applications :*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \text{et} & & \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y & & & (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

sont continues.

On dit qu'un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel topologique localement convexe, ou espace localement convexe (e.l.c.), si tout point possède une base de voisinages convexes.

Il résulte de la Proposition 1.1.5, et du fait que les boules sont convexes, que tout espace normé est un e.v.t. localement convexe.

preuve de la proposition 1.1.2. $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ sont munis de la topologie-produit, qui peut être définie par les normes :

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} \quad \text{et} \quad \|(\lambda, x)\| = \max\{|\lambda|, \|x\|\}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser les inégalités :

$$\|(x + y) - (x_0 + y_0)\| = \|(x - x_0) + (y - y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\|$$

et :

$$\begin{aligned} \|\lambda x - \lambda_0 x_0\| &= \|(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0\| \\ &\leq |\lambda - \lambda_0| \|x - x_0\| + |\lambda_0| \|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|x_0\|. \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.1.1. *Les translations :*

$$\begin{aligned} \tau_a : E &\longrightarrow E & (a \in E) \\ x &\longmapsto x + a \end{aligned}$$

et les homothéties :

$$\begin{aligned} h_\lambda : E &\longrightarrow E & (\lambda \in \mathbb{K}) \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

sont continues. Ce sont des homéomorphismes (si $\lambda \neq 0$ pour les homothéties).

Corollaire 1.1.2. *Toutes les boules fermées de rayon $r > 0$ sont homéomorphes entre-elles, donc à B_E . Toutes les boules ouvertes de rayon $r > 0$ sont homéomorphes entre-elles.*

Corollaire 1.1.3. *L'adhérence de la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$ est la boule fermée $B(x, r)$ et l'intérieur de la boule fermée $B(x, r)$ est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$.*

Preuve. 1) L'adhérence de la boule ouverte est évidemment contenue dans la boule fermée, puisque celle-ci est fermée dans E . Inversement, si $y \in B(x, r)$, on a

$y_n = \frac{1}{n}x + (1 - \frac{1}{n})y \in \overset{\circ}{B}(x, r)$ car $\|x - [\frac{1}{n}x + (1 - \frac{1}{n})y]\| = (1 - \frac{1}{n})\|x - y\| < r$; comme $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, on obtient $y \in \overset{\circ}{B}(x, r)$.

2) Étant ouverte dans E , la boule ouverte est contenue dans l'intérieur de la boule fermée. Pour montrer l'inclusion inverse, il faut montrer que si y n'est pas dans la boule ouverte, alors aucune boule $B(y, \rho)$ de centre y et de rayon $\rho > 0$ n'est contenue dans $B(x, r)$. Or si $y \notin \overset{\circ}{B}(x, r)$, on a $\|y - x\| \geq r$. Pour tout $\rho > 0$, le vecteur $z = y + \frac{\rho}{\|y - x\|}(y - x)$ est dans $B(y, \rho)$, puisque $\|z - y\| = \frac{\rho}{\|y - x\|}\|y - x\| = \rho$, mais n'est pas dans $B(x, r)$, car $\|z - x\| = \left\|y + \frac{\rho}{\|y - x\|}(y - x) - x\right\| = \left(1 + \frac{\rho}{\|y - x\|}\right)\|y - x\| \geq (1 + \frac{\rho}{\|y - x\|})r > r$. Donc y n'est pas dans l'intérieur de $B(x, r)$. ■

Corollaire 1.1.4. *Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors son adhérence $\bar{F}$ aussi.*

Preuve. Soit $x, y \in \bar{F}$ et $a, b \in \mathbb{K}$. Il existe $x_n, y_n \in F$ tels que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Par la Proposition 1.1.5, on a $ax + by = \lim_{n \rightarrow \infty} (ax_n + by_n)$; et comme $ax_n + by_n \in F$, on obtient $ax + by \in \bar{F}$. ■

Proposition 1.1.3. *l'application $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$ est continue.*

Preuve. Il suffit d'utiliser l'inégalité $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. ■

1.1.2 Quelques exemples usuels

Espaces de suites

1) a) Il est immédiat de voir que si l'on pose, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{cases} \|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \\ \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \end{cases}$$

alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux normes sur $\mathbb{K}^n$.

On note $\ell_1^n = (K^n, \|\cdot\|_1)$ et $\ell_\infty^n = (K^n, \|\cdot\|_\infty)$.

b) Si p est un nombre réel vérifiant $1 < p < \infty$, on obtient une norme sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

On note $\ell_1^n = (K^n, \|\cdot\|_p)$.

Seule l'inégalité triangulaire :

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p},$$

appelée inégalité de **Minkowski**, n'est pas évidente ; elle peut se démontrer ainsi : Par convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^p$, on a $[\alpha u + (1 - \alpha)v]^p \leq \alpha u^p + (1 - \alpha)v^p$ si $0 \leq \alpha \leq 1$ et $u, v \geq 0$. Prenons $\alpha = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$ (de sorte que $1 - \alpha = \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$), $u = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $v = \frac{|y_k|}{\|y\|_p}$ (si $\|x\|_p = 0$ ou $\|y\|_p = 0$, le résultat est évident). En sommant, on obtient $\frac{1}{(\|x\|_p + \|y\|_p)^p} \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^p \leq 1$, ce qui donne le résultat, puisque $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

Une inégalité très utile est **l'inégalité de Hölder**. Rappelons que si $1 < p < \infty$, **l'exposant conjugué** de p est le nombre q vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Explicitement, $q = \frac{p}{p-1}$. On a $1 < q < \infty$, et p est l'exposant conjugué de q . Ils sont aussi liés par l'égalité $(p-1)(q-1) = 1$.

L'inégalité de Hölder s'énonce alors ainsi si $1 < p < \infty$ et q est l'exposant conjugué de p , alors, pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}$$

Lorsque $p = 2$, alors $q = 2$: c'est **l'inégalité de Cauchy-Schwarz** (due, sous cette forme, à Cauchy en 1821).

Pour montrer l'inégalité de Hölder, on part de l'inégalité $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, pour $a, b \geq 0$ (c'est une conséquence de la convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{t^p}{p}$ et du fait que sa dérivée $t \mapsto t^{p-1}$ est la réciproque de la dérivée $t \mapsto t^{q-1}$ de $t \mapsto \frac{t^q}{q}$, comme on peut s'en convaincre en faisant un dessin ; mais on peut le voir aussi simplement, par exemple en étudiant les variations de la fonction $t \mapsto \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bt$) ; on l'applique P avec $a = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b = \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$ (on peut supposer $\|x\|_p > 0$ et $\|y\|_q > 0$), et on somme. On obtient $\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d'où l'inégalité de Hölder.

2) Ces exemples se généralisent en dimension infinie. a) Soit :

a) Soit :

$$c_0 = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{K}^{N^*} ; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\},$$

et :

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{K}^{N^*} ; (x_n)_n \text{ soit bornée} \right\};$$

on les munit de la norme définie par :

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|.$$

b) pour $1 \leq p < \infty$, on pose :

$$\ell_p = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{K}^{N^*}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\};$$

on le munit de la norme définie par :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le fait que ℓ_p soit un sous-espace vectoriel de l'espace des suites, et que $\|\cdot\|_p$, soit une norme sur ℓ_p se déduit de l'inégalité de Minkowski (évidente lorsque $p = 1$) généralisée comme suit :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p},$$

pour tous $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots \in \mathbf{K}$. On l'obtient à partir de la précédente en faisant tendre le nombre de termes vers l'infini : pour tout $N \geq 1$, on a $\left(\sum_{n=1}^N |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^N |y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}$

L'inégalité de Hölder se généralise de la même façon. Si $1 < p < \infty$ et si q est l'exposant conjugué de p , on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}.$$

En particulier, lorsque $x = (x_n)_n \in \ell_p$ et $y = (y_n)_n \in \ell_q$, on a $xy \in \ell_1$ et $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

Les espaces ℓ_p sont en fait des cas particuliers des espaces de Lebesgue $L^p(m)$, dont nous rappellerons la définition ci-dessous, correspondant à la mesure de comptage sur N^* .

Espaces de fonctions

1) a) Soit A un ensemble et soit l'espace $\mathcal{F}_b(A)$ l'espace (que l'on note aussi $\ell_{\infty}(A)$ si l'on veut privilégier l'aspect "famille d'éléments") des fonctions bornées sur A , à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si l'on pose :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f(x)|,$$

on a une norme, appelée norme uniforme. La topologie associée à cette norme est la topologie de la convergence uniforme ; en effet, il est clair que $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ si et seulement si $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f .

b) Soit K un espace compact et $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K (à valeurs scalaires). Toute fonction continue sur un compact étant bornée, $\mathcal{C}(K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_b(K)$. On le munit usuellement de la norme induite $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Notons que, lorsque $K = [0, 1]$, par exemple, on peut aussi munir $\mathcal{C}([0, 1])$ de la norme définie par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

qui vérifie $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\infty}$.

c) Sur l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$ des fonctions k fois continûment dérivables sur $[0, 1]$, on peut mettre la norme :

$$\|f\|^{(k)} = \max \left\{ \|f\|_{\infty}, \|f'\|_{\infty}, \dots, \|f^{(k)}\|_{\infty} \right\}$$

2) Les espaces de Lebesgue.

Soit $(S, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré ; pour $1 < p < \infty$, on note $\mathcal{L}^p(m)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables $f : S \mapsto \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que :

$$\int_S |f(t)|^p dm(t) < +\infty,$$

et l'on pose :

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f(t)|^p dm(t) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que $\|f\|_p = 0$ si et seulement $f = 0$ m-presque partout.

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Minkowski). *Soit $1 \leq p < \infty$. Pour $f, g \in \mathcal{L}^p(m)$, on a l'inégalité de Minkowski :*

$$\left(\int_S |f + g|^p dm \right)^{1/p} \leq \left(\int_S |f|^p dm \right)^{1/p} + \left(\int_S |g|^p dm \right)^{1/p}$$

Il en résulte que $\mathcal{L}^p(m)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables et que $\|\cdot\|_p$, est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(m)$. Pour $p = 1$, l'inégalité est évidente.

Preuve. La preuve est la même que pour les suites. On se place dans le cas $p > 1$. On peut supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_p > 0$ (car sinon $f = 0$ m-p.p. et alors $f + g = g$ m-p.p., ou $g = 0$ m-p.p. et alors $f + g = f$ m-p.p.). On applique l'inégalité de convexité $[\alpha u + (1 - \alpha)v]^p \leq \alpha u^p + (1 - \alpha)v^p$ avec $\alpha = \|f\|_p / (\|f\|_p + \|g\|_p) \in [0, 1]$, $u = |f(t)| / \|f\|_p$ et $v = |g(t)| / \|g\|_p$. Comme $\alpha / \|f\|_p = (1 - \alpha) / \|g\|_p = 1 / (\|f\|_p + \|g\|_p)$, on a $\left(\frac{|f(t)| + |g(t)|}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right)^p \leq \frac{\alpha}{\|f\|_p^p} |f(t)|^p + \frac{1 - \alpha}{\|g\|_p^p} |g(t)|^p$, d'où, en intégrant :

$$\begin{aligned} \int_S \frac{(|f(t)| + |g(t)|)^p}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} dm(t) &\leq \frac{\alpha}{\|f\|_p^p} \int_S |f(t)|^p dm(t) + \frac{1 - \alpha}{\|g\|_p^p} \int_S |g(t)|^p dm(t) \\ &= \alpha + (1 - \alpha) = 1 \end{aligned}$$

cela donne le résultat puisque $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$. ■ On a vu que $\|\cdot\|_p$, n'est pas une norme en général, puisque $\|f\|_p = 0$ si et seulement $f = 0$ m-presque partout. Si désigne l'espace des fonctions mesurables $f : S \mapsto \mathbb{K}$ nulles m-presque partout, l'espace-quotient $L^p(m) = \frac{\mathcal{L}^p(m)}{\mathcal{N}}$ est alors normé si l'on pose $\|\tilde{f}\|_p = \|f\|_p$ (voir l'Exercice 15). Dans la pratique, on ne fera pas de distinction entre la fonction $\tilde{f}$ et sa classe d'équivalence m-presque partout f , et on écrira donc $f \in L^p(m)$ au lieu de $f \in \mathcal{L}^p(m)$. Toutefois, il faut parfois faire attention, notamment lorsque l'on manipule des quantités non dénombrables de fonctions. Cette distinction peut déjà intervenir pour des questions de mesurabilité. On peut aussi le voir sur l'exemple suivant :

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les parties finies de $[0, 1]$; pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a,

relativement à la mesure de Lebesgue, $I_A = 0$ p.p. ; donc $\tilde{I}_A = \tilde{0}$. Mais, d'un autre côté, $\sup_{A \in \mathcal{F}} I_A(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$; donc $(\sup_{A \in \mathcal{F}} \tilde{I}_A) = \tilde{I}$.

Comme pour les suites, l'inégalité de Hölder est très utile.

Théorème 1.1.2 (Inégalité de Hölder). *Si $1 < p < \infty$ et si q est l'exposant conjugué de p , on a, pour $f \in \mathcal{L}^p(m)$ et $g \in \mathcal{L}^q(m)$, l'inégalité de Hölder :*

$$\int_S |fg|^p dm \leq \left(\int_S |f|^p dm \right)^{1/p} \left(\int_S |g|^p dm \right)^{1/p}$$

Pour $p = q = 2$, on l'appelle inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_S |fg|^2 dm \leq \left(\int_S |f|^2 dm \right)^{1/2} \left(\int_S |g|^2 dm \right)^{1/2}$$

si $f, g \in \mathcal{L}^2(m)$ (elle a été démontrée par Bouniakowski en 1859 et redémontrée par Schwarz en 1885 ; elle généralise l'inégalité pour les sommes démontrée par Cauchy). Elle se démontre de la même façon que pour les sommes, en intégrant au lieu de sommer.

Preuve. On peut supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$ car sinon $f = 0m - p.p.$ ou $g = 0m - p.p.$, et alors $fg = 0m - p.p.$ On utilise l'inégalité $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec $a = |f(t)|/\|f\|_p$ et $b = |g(t)|/\|g\|_q$. En intégrant, on obtient :

$$\int_S \frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_p \|g\|_q} dm(t) \leq \frac{1}{p} \int_S \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p} dm(t) + \frac{1}{q} \int_S \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q} dm(t) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

d'où le résultat. ■

Comme application on a le résultat suivant.

Proposition 1.1.4. Soit $(S, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré de mesure finie. Alors, pour $1 < P_1 < P_2 < \infty$, on a $\mathcal{L}^{P_2}(m) \subseteq \mathcal{L}^{P_1}(m) \subseteq \mathcal{L}^1(m)$. De plus si $m(S) = 1$ (c'est à-dire que m est une mesure de probabilité), alors $\|f\|_1 < \|f\|_{p_1} < \|f\|_{p_2}$ pour toute $f \in \mathcal{L}^{p_2}(m)$.

Preuve. On peut supposer $p_1 < p_2$. Posons $p = \frac{p_2}{p_1}$. Comme $p > 1$, on peut utiliser l'inégalité de Hölder :

$$\int_S |f|^{p_1} dm \leq \left(\int_S 1^q dm \right)^{1/q} \left(\int_S (|f|^{p_1})^p dm \right)^{1/p} = [m(S)]^{1/q} \left(\int_S |f|^{p_2} dm \right)^{1/p} ;$$

d'où $\|f\|_{p_1} \leq [m(S)]^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2}$.

La seconde inclusion s'obtient en remplaçant p_2 par p_1 et en prenant $p_1 = 1$. ■

Remarque 1. Au contraire, pour les espaces ℓ_p , on a les inclusions inverses ; pour $1 < P_1 < P_2 < \infty$:

$$\ell_1 \subseteq \ell_{p_1} \subseteq \ell_{p_2} \subseteq c_0 \subseteq \ell_\infty.$$

De plus $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1} \leq \|x\|_1$ pour tout $x \in \ell_1$.

En effet, si $x \in \ell_{p_2}$, $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2} < +\infty$; donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $|x_n| \leq (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2})^{1/p_2} = \|x\|_{p_2}$; donc $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n| \leq \|x\|_{p_2}$. Maintenant, si $x \in \ell_{p_1}$ n'est pas nul, posons $x' = x/\|x\|_{p_1}$. On a $\|x'\|_{p_1} = 1$, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^\infty |x'_n|^{p_1} = 1$. Il en résulte que $|x'_n|^{p_1} \leq 1$, et donc $|x'_n| \leq 1$, pour tout $n \geq 1$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $|x'_n|^{p_2} \leq |x'_n|^{p_1}$, puisque $p_2 \geq p_1$. Il en résulte que $\sum_{n=1}^\infty |x'_n|^{p_2} \leq \sum_{n=1}^\infty |x'_n|^{p_1} = 1$, c'est-à-dire que $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2} \leq \|x\|_{p_1}^{p_2}$. Donc $x \in \ell_{p_2}$ et $\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}$.

Remarque 2. Par contre, il est important de noter que $\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R})$ pour tous $p_1 \neq p_2$.

En effet, si $p_1 < p_2$, la fonction définie par $f(t) = 1/t^{1/p_2}$ pour $0 < t \leq 1$, et par $f(t) = 0$ ailleurs, est dans $\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R})$ car $p_1/p_2 < 1$, mais pas dans $\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R})$. Si $p_1 > p_2$, alors la fonction définie par $f(t) = 1/t^{1/p_2}$ pour $t \geq 1$, et $f(t) = 0$ pour $t < 1$, est dans $\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R})$ car cette fois-ci $p_1/p_2 > 1$, mais n'est pas dans $\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R})$.

1.1.3 Espaces de Banach

Définition 1.1.4. Une suite $(x_k)_k$ d'éléments d'un espace normé E est dite suite de Cauchy si :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N \geq 1) \quad k, l \geq N \implies \|x_k - x_l\| \leq \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.1.5. On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

Exemples.

- a) Il est immédiat de voir que $\ell_p^n = ((K)^n, \|\cdot\|_p)$ est complet pour $1 \leq p \leq \infty$.
- b) Les espaces c_0 et ℓ_p , pour $1 \leq p \leq \infty$ sont complets (Exercice 3).
- c) $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ est complet : toute suite uniformément de Cauchy est ment convergente, et si elles sont continues, la limite est continue.
Par contre, $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet (Exercice 3).
- d) $(\mathcal{C}^k([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet pour $k \geq 1$, mais $(\mathcal{C}^k([0, 1]), \|\cdot\|^{(k)})$ est complet.
- e) Les espaces de Lebesgue sont complets. C'est l'objet du théorème suivant.

■ **Théorème 1.1.3** (Théorème de Riesz-Fisher). *Pour tout espace mesuré $(S, \mathcal{T}, m)$, et pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(m)$ est un espace de Banach.*

E. Fisher et F. Riesz ont en fait démontré, indépendamment, en 1907 que $L^2([0, 1])$ est isomorphe à ℓ_2 ; cela repose essentiellement sur le fait que $L^2([0, 1])$ est complet (voir le Chapitre 2 sur les espaces de Hilbert); c'est pourquoi on donne le nom de Riesz-Fisher à ce théorème, démontré en fait, pour $L^p([0, 1])$ et $1 < p < \infty$, par F. Riesz en 1910 (et pour le distinguer des nombreux autres théorèmes dus à F. Riesz).
Preuve. Soit $(F_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p(m)$. Choisissons un représentant $f_n \in \mathcal{L}^p(m)$ de F_n .

- a) Comme la suite est de Cauchy, on peut construire une sous-suite $(f_{n_k})_j$ avec $(n_1 < n_2 < \dots)$ telle que :

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Posons :

$$\begin{cases} g_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \\ g = \sum_{j=1}^\infty |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \end{cases}$$

Ces fonctions sont mesurables et l'on a :

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p = \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} \leq 1.$$

Le Lemme de Fatou, appliqué à la suite $(g_k^p)_{k \geq 1}$, donne :

$$\int_S g^p dm \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_S g_k^p dm = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \leq 1.$$

La fonction g^p est donc intégrable. En particulier elle est finie presque partout; donc g aussi. Cela signifie que la série $\sum_{k \geq 1} (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t))$ converge absolument, pour presque tout $t \in S$.

Posons alors :

$$f(t) = \begin{cases} f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^\infty (f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)) & \text{si } g(t) < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f est mesurable et :

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(t) \quad \text{pour presque tout } t \in S.$$

- b) Il reste à voir que la suite est de Cauchy, il existe un entier $N \geq 1$ tel que :

$$n, k \geq N \implies \|f_n - f_k\|_p \leq \varepsilon.$$

Pour $k \geq N$, le Lemme de Fatou donne :

$$\int_S |f - f_k|^p dm \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_S |f_{n_j} - f_k|^p dm \leq \varepsilon^p.$$

On en déduit d'abord que $(f - f_k) \in \mathcal{L}^p(m)$, donc que $f = (f - f_k) + f_k \in \mathcal{L}^p(m)$; et ensuite, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_p = 0$.

- c) Finalement si l'on note $F \in L^p(m)$ la classe d'équivalence m-presque partout de f , on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \|F - F_k\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_p = 0$.

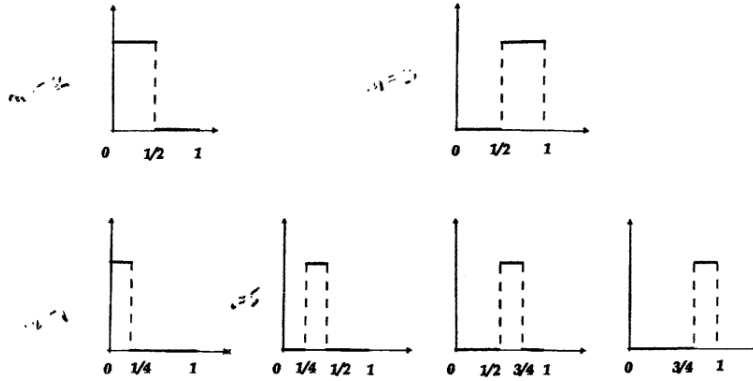
■

Remarque. Notons qu'au passage, on a prouvé le très important résultat suivant (on ne fera plus désormais de distinction entre une fonction et sa classe d'équivalence presque partout) : ■

Théorème 1.1.4. Si $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans $L^p(m)$, avec $1 \leq p < \infty$, alors on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge presque partout vers f .

Remarque. La suite elle-même peut très bien ne converger nulle part.

Par exemple, sur $S =]0, 1]$, soit $f_n = \mathbf{I}_{] \frac{1}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$ lorsque $n = 2^k + l, 0 \leq l \leq 2^k - 1$: ■



Alors, $\|f_n\|_p = \frac{1}{2^{k/p}}$ pour $2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$; donc $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ dans $L^p([0, 1])$, mais pour aucun $t \in]0, 1[$, la suite $(f_n(t))_n$ n'est convergente. Toutefois, la sous-suite $(f_{2^k})_{k \geq 0}$, par exemple, converge ponctuellement vers 0.

1.1.4 Applications linéaires

Pour les application linéaires, on a un critère très simple, et très utile, de continuité.

Proposition 1.1.5. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés et soit $T : E \mapsto F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si il existe une constante $K \geq 0$ telle que :

$$\|T(x)\|_F \leq K\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Preuve. Il est clair que cette propriété entraîne la continuité de T car on a, grâce à la linéarité :

$$\|T(x) - T(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E, \quad \forall x, y \in E;$$

T est donc même lipschitzienne.

Inversement, si T est continue en 0, on a, par définition :

$$(\exists K > 0) \quad \|y - 0\|_E = \|y\|_E \leq 1/K \implies \|T(y)\|_F = \|T(y) - T(0)\|_F \leq 1$$

Pour tout $x \in E$, non nul, posons $y = \frac{1}{K\|x\|_E}x$; on a $\|y\|_E = 1/K$ et l'implication ci-dessus donne, grâce à l'homogénéité de T et de la norme :

$$\frac{1}{K\|x\|_E} \|T(x)\|_F \leq 1,$$

d'où $\|T(x)\|_F \leq K\|x\|_E$. Comme cette inégalité est évidemment vraie pour $x = 0$, cela montre la Proposition 1.1.5.

On a donc $\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty$. La proposition suivante est alors évidente : ■

Proposition 1.1.6. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue. Si l'on pose

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}, \text{ alors :}$$

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\| \|x\|_E, \quad \forall x \in E$$

$\|T\|$ est donc la plus petite constante $K \geq 0$ apparaissant dans la Proposition 1.1.5.

Proposition 1.1.7. On a aussi

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F.$$

Preuve. Appelons S la première expression et S_1 la suivante. On a bien sûr $S_1 \leq S$, et aussi $S \leq \|T\|$, puisque $\|T(x)\|_F \leq \|T\|$ si $\|x\|_E \leq 1$, par définition de $\|T\|$. Il reste à voir que $\|T\| \leq S_1$; mais :

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0} \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq S_1,$$

Car $\frac{x}{\|x\|_E}$ est de norme 1. ■

Proposition 1.1.8. Soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace de toutes les applications linéaires continues de E dans F . L'application $T \mapsto \|T\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$, appelée la norme opérateur.

Si F est complet, $\mathcal{L}(E, F)$ aussi.

Preuve. Le fait que ce soit une norme est facile à vérifier.

Supposons F complet, et soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Alors, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_n$, est de Cauchy dans F , en vertu de l'inégalité :

$$\|T_n(x) - T_k(x)\|_F \leq \|T_n - T_k\| \|x\|_E, \quad (1.1)$$

Elle converge donc vers un élément $T(x) \in F$. Il est facile de voir qu'alors $T : E \rightarrow F$ est linéaire. Elle est continue car :

$$\|Tx\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\|_F \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \|x\|_E \leq \left(\sup_{n \geq 1} \|T_n\| \right) \|x\|_E$$

et car $(\sup_{n \geq 1} \|T_n\|) < +\infty$ puisque toute suite de Cauchy est bornée. Pour finir, en faisant tendre k vers l'infini dans 1.1, on obtient :

$$\|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \|T_n - T_k\| \right) \|x\|_E$$

quand n tend vers l'infini, puisque $(T_n)_n$ est de Cauchy. Donc $(T_n)_n$ converge vers T pour la norme opérateur.

En particulier, si $F = \mathbb{K}$, $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est toujours complet. ■

Définition 1.1.6. $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté E^* et est appelé le dual de E . C'est toujours un espace de Banach.

Notons que E^* est le dual topologique de E , et est strictement plus petit que le dual algébrique, l'espace de toutes les formes linéaires, de E , du moins si E est de dimension infinie (voir l'Exercice 8). La norme de $\varphi \in E^*$ est donc définie par :

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_{E^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| = \sup_{\|x\| = 1} |\varphi(x)|.$$

Notation. On utilise souvent la notation $\langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$. ■

Définition 1.1.7. Si l'application linéaire $T : E \mapsto F$ est bijective continue et si $T^{-1} : F \mapsto E$ est continue, on dit que T est un isomorphisme (d'espaces normes) entre E et F .

On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme entre E et F ; on dit qu'il sont isométriques s'il existe un isomorphisme isométrique $T : E \rightarrow F$.

Notons que dire qu'une application $T : E \rightarrow F$ est isométrique signifie que l'on a $\|T(x_1) - T(x_2)\|_F = \|x_1 - x_2\|_E$ pour tous $x_1, x_2 \in E$. Lorsque T est linéaire, cela s'exprime par $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$; T est donc en particulier de norme $\|T\| = 1$. Toute isométrie est injective; dire qu'elle est bijective équivaut donc à dire qu'elle est surjective. Dans ce cas, T^{-1} est aussi une isométrie; elle est donc automatiquement continue.

Dire que T est un isomorphisme signifie que T est linéaire bijective et qu'il existe deux constantes $0 < \alpha < \beta < \infty$ telles que

$$\boxed{\alpha\|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq \beta\|x\|_E} \quad \text{pour tout } x \in E$$

En effet, si T est un isomorphisme, la continuité de T^{-1} permet d'écrire : $\|T^{-1}y\|_E \leq \|T^{-1}\|\|y\|_F$ pour tout $y \in F$, soit $\|x\|_E \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|_F$ pour tout $x \in E$. On a donc la double inégalité, avec $\alpha = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ et $\beta = \|T\|$. Inversement, si on a cette double inégalité, alors T est continue et $\|T\| \leq \beta$ et T^{-1} est continue et $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$, puisque $\alpha\|T^{-1}y\|_E \leq \|y\|_F$ pour tout $y \in F$.

On peut aussi remarquer que l'inégalité de gauche entraîne l'injectivité de T .

1.1.5 Normes équivalentes

Définition 1.1.8. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|$. On dit que $\|\cdot\|$ est plus fine que $\|\cdot\|$ (et que $\|\cdot\|$ est moins fine que $\|\cdot\|$) s'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\|x\| \leq K\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Cela équivaut à dire que l'application identité :

$$\text{id}_E : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$$

est continue.

Cela équivaut encore à dire que :

$$B_{\|\cdot\|}(0, r/K) \subseteq B_{\|\cdot\|}(0, r);$$

les boules pour $\|\cdot\|$ sont donc "plus petites" que les boules pour $\|\cdot\|$: elles séparent mieux les points; plus précisément, la topologie définie par $\|\cdot\|$ est plus fine que celle définie par $\|\cdot\|$ (il y a plus d'ouverts).

Exemple. Dans $\mathcal{C}([0, 1])$, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme $\|\cdot\|_1$. ■

Définition 1.1.9. On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe deux constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que :

$$K_1\|x\| \leq \|x\| \leq K_2\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

En d'autres termes, chacune est plus fine que l'autre.

Cela revient à dire que **l'application identité** réalise un isomorphisme de E sur lui-même (ou plutôt de E muni de $\|\cdot\|$ sur E muni de $\|\cdot\|$). Cela revient aussi à dire que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|$ définissent la même topologie sur E .

Exemples.

- 1) Dans $\mathbb{K}^n$ les normes $\|\cdot\|_p$ pour $1 \leq p \leq \infty$ sont équivalentes :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

On va voir qu'en fait toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes entre elles.

- 2) Dans $\mathcal{C}([0, 1])$, les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|x\|_1$ ne sont pas équivalentes, comme on peut le vérifier facilement (voir par exemple l'Exercice 2).

■

1.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

1.2.1 Equivalence des normes

Théorème 1.2.1. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes entre-elles.*

Preuve.

- 1) Soit $\|\cdot\|$ une norme arbitraire sur E . Nous allons montrer qu'elle est équivalente à une norme particulière sur E , de sorte que, par transitivité, deux normes arbitraires seront équivalentes.
- 2) Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Si $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, on pose :

$$\|x\| = \max\{|\xi_1|, \dots, |\xi_n|\}.$$

Ainsi, $(E, \|\cdot\|)$ est isométrique à $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) = \ell_\infty^n(\mathbb{K})$, par l'application

$$V : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$$

$$a = (a_1, \dots, a_n) \longmapsto V(a) = \sum_{k=1}^n a_k e_k.$$

On a de plus :

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|e_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\| \right) \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = K \|x\|.$$

- 3) Cela signifie que l'application identité $\text{id}_E : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ est continue. Alors, l'application :

$$N : (E, \|\cdot\|) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \|x\|$$

est aussi continue, par la Proposition 1.1.3

- 4) Soit :

$$S_n = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n; \|a\|_\infty = 1\}.$$

C'est une partie fermée et bornée, donc compacte, de $\mathbf{K}^n$ (on notera que la norme $\|\cdot\|_\infty$ définit la topologie usuelle sur $\mathbf{K}^n$). Donc :

$$S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$$

est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$ (par isométrie : $S = V(S_\infty)$).

- 5) Il en résulte qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $\|x_0\| = N(x_0) = \inf_{x \in S} N(x) = \inf_{x \in S} \|x\|$. Comme $x_0 \neq 0$ (puisque $\|x_0\| = 1$), on a $c = \|x_0\| > 0$. Cela signifie que :

$$(\forall x \in S) \quad \|x\| \geq c.$$

Par homogénéité (pour tout $x \neq 0, x' = x/\|x\| \in S$), on obtient :

$$(\forall x \in E) \quad \|x\| \geq c\|x\|,$$

ce qu'il fallait démontrer.

■ **Remarque.** Au passage, on a montré :

Corollaire 1.2.1. *Tout espace normé de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, muni de l'une de ses normes usuelles.*

Il en résulte :

Corollaire 1.2.2. *Si E est un espace normé de dimension finie, ses parties fermées bornées sont compactes.*

Corollaire 1.2.3. 1) *Tout espace normé de dimension finie est complet.*
 2) *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace normé est fermé dans cet espace.*
 3) *Si E est un espace normé de dimension finie, alors toute application linéaire $T : E \rightarrow F$ dans un espace normé arbitraire est continue.*

■ **Preuve.** 1) résulte immédiatement du Corollaire 1.2.1, et 2) de ce que tout sous espace complet est fermé. Pour le 3), il suffit de remarquer que si $e_1, \dots, e_n$ est une base de E , et $\|\cdot\|$ la norme associée comme dans la preuve du Théorème 1.2.1, alors, pour $x = \sum_{k=1}^n a_k e_k \in E$, on a :

$$\|T(x)\|_F \leq \left(\sum_{k=1}^n \|T(e_k)\|_F \right) \max_{k \leq n} |a_k| = C \|x\| \leq CK \|x\|_E$$

puisque $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_E$ sont équivalentes. ■

On fera attention, par contre, que si c'est l'espace d'arrivée qui est de dimension finie, la continuité n'est pas automatique (puisque'il existe des formes linéaires non continues, si E est de dimension infinie : Exercice 8).

1.2.2 Compacité des boules

Nous avons vu dans la preuve du Théorème 1.2.1 que le point essentiel (via le Corollaire 1.2.2) est que les parties fermées bornées d'un espace normé de dimension finie sont compactes. Notons qu'il est équivalent de dire que toutes les boules fermées sont compactes. Nous allons voir que cela n'arrive en fait qu'en dimension finie.

Théorème 1.2.2 (Théorème de Riesz, 1918). *Si un espace normé E possède une boule compacte $B(x_0, r)$, de rayon $r > 0$, alors il est de dimension finie.*

On en déduit que dans un espace de dimension infinie, les compacts sont "très minces" :

Corollaire 1.2.4. *Si E est un espace normé de dimension infinie, alors tout compact de E est d'intérieur vide.*

En effet, si K est un compact d'intérieur non vide, il contient une boule fermée de rayon $r > 0$, qui est donc compacte, et donc E est de dimension finie.

Notons que si une boule est compacte, c'est forcément une boule fermée. D'autre part, si une boule, de rayon $r > 0$, est compacte, alors toutes les boules fermées le sont, puisqu'elles sont homéomorphes entre-elles (celles de rayon nul étant de toute façon compactes). Il suffit donc de montrer que si E est de dimension infinie, alors sa boule-unité B_E n'est pas compacte. Pour cela, on utilisera un lemme.

Lemme 1.2.1 (Lemme de Riesz). *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace normé E , qui n'est pas E tout entier. Alors, pour tout nombre δ tel que $0 < \delta < 1$, il existe $x \in E$ tel que :*

$$\begin{cases} \|x\| = 1 \\ \text{dist}(x, F) \geq 1 - \delta \end{cases}$$

Rappelons que :

$$\text{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Si F est de dimension finie, un argument de compacité permet de montrer qu'en fait on peut choisir un tel $x \in E$, de norme 1, avec $\text{dist}(x, F) = 1$, mais nous n'en aurons pas besoin. Dans le cas de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, il suffit de prendre x de norme 1 et orthogonal à F (car alors, pour tout $y \in F$, on a $\|x - y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$, par le Théorème de Pythagore; donc $\text{dist}(x, F) \geq \|x\|_2 = 1$, d'où l'égalité car $\|x\| \geq \text{dist}(x, F)$, puisque $0 \in F$). C'est pourquoi ce lemme est parfois appelé Lemme de la quasi-perpendiculaire.

preuve du Théorème de Riesz. Soit E un espace normé de dimension infinie. Fixons un nombre $\delta \in]0, 1[$; par exemple $\delta = \frac{1}{2}$.

Partons d'un $x_1 \in E$, de norme 1, et prenons pour F le sous-espace vectoriel F_1 engendré par x_1 . Comme il est de dimension 1, il est fermé, et n'est pas égal à E , puisque E est de dimension infinie. Le lemme donne un $x_2 \in E$, de norme 1 tel que :

$$\|x_2 - x_1\| \geq \text{dist}(x_2, F_1) \geq \frac{1}{2}.$$

Prenons ensuite pour F le sous-espace vectoriel F_2 engendré par x_1 et x_2 . Il est de dimension 2 (car $x_2 \notin F_1$), et est donc fermé, et différent de E ; il existe donc $x_3 \in E$, de norme 1 tel que :

$$\|x_3 - x_1\| \text{ et } \|x_3 - x_2\| \geq \text{dist}(x_3, F_2) \geq \frac{1}{2}.$$

Comme E est de dimension infinie, on peut itérer le procédé indéfiniment. On obtient une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ de vecteurs de norme 1 telle que :

$$\|x_k - x_l\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall k \neq l.$$

Cette suite ne peut avoir aucune sous-suite convergente. Comme elle est contenue dans la boule-unité de E , cette boule n'est pas compacte. ■

Remarque. On a en fait démontré un peu plus que ce qui était énoncé, à savoir que si E est de dimension infinie, sa sphère unité S_E n'est pas compacte (noter que S_E est fermée dans B_E ; donc si B_E est compacte, S_E aussi). ■

preuve du lemme. Comme $F \neq E$, on peut trouver $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin F$. Comme F est fermé, on a :

$$d = \text{dist}(x_0, F) > 0.$$

Comme $0 < \delta < 1$, on a $\frac{d}{1-\delta} > d$ et l'on peut donc trouver un $y_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| \leq \frac{d}{(1-\delta)}$. Il ne reste plus qu'à "corriger" x_0 par y_0 et à normer ce vecteur : soit $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$; c'est bien un vecteur de norme 1 et, comme $y_0 + \|x_0 - y_0\|y \in F$,

on a :

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \|(x_0 - y_0) - \|x_0 - y_0\|y\| \\ &\geq \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \text{dist}(x_0, F) = \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \geq 1 - \delta, \end{aligned}$$

pour tout $y \in F$. ■

CHAPITRE 2

ESPACES DE HILBERT

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1. Soit H un espace vectoriel réel, resp. complexe. On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique, resp. hermitienne, qui est définie positive. On notera $(x|y)$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$.

Cela signifie que l'application :

$$\begin{aligned} (\cdot|\cdot) : H \times H &\longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto (x|y) \end{aligned}$$

vérifie : 1) pour tout $y \in H$, l'application $x \in H \mapsto (x|y) \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire ; 2) pour tous $x, y \in H$, on a :

$$\begin{cases} (y|x) = (x|y) & \text{si l'espace est réel} \\ (y|x) = \overline{(x|y)} & \text{si l'espace est complexe ;} \end{cases}$$

3) pour tout $x \in H$, on a $(x|x) \geq 0$ et $(x|x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarque. Notons que dans le cas complexe, on a donc, pour $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(x|\lambda y) = \bar{\lambda}(x|y)$$

■

Définition 2.1.2. Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un **espace préhilbertien**.

Exemples. 1) a) Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$(x|y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^n$ est défini par :

$$(x|y) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

b) On peut définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{K}^n$ en se donnant des poids, c'est-à-dire des nombres $w_1, \dots, w_n > 0$, et en posant :

$$\begin{cases} (x | y) = \sum_{k=1}^n w_k x_k y_k, & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ (x | y) = \sum_{k=1}^n w_k x_k \bar{y}_k, & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

2) Si $(S, \mathcal{F}, m)$ est un espace mesuré, on munit $H = L^2(m)$ d'un produit scalaire (que l'on qualifera de naturel) en posant, pour $f, g \in L^2(m)$:

$$(f | g) = \int_S f g dm \quad \text{dans le cas réel,}$$

et :

$$(f | g) = \int_S f \bar{g} dm \quad \text{dans le cas complexe.}$$

En particulier, sur ℓ_2 , on a le produit scalaire naturel défini par :

$$(x | y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{dans le cas réel,}$$

et :

$$(x | y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \quad \text{dans le cas complexe.}$$

pour $x = (x_n)_{n \geq 1}, y = (y_n)_{n \geq 1} \in \ell_2$. ■

2.2 Propriétés élémentaires

Notation. puisque $(x|x) \geq 0$, on peut poser :

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

■

Proposition 2.2.1. pour tous $x, y \in H$:

- a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$ (cas réel) ;
 b) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y)$ (cas complexe).

Preuve. Il suffit de développer :

$$\|x + y\|^2 = (x + y | x + y) = (x | x) + (y | y) + (x | y) + (y | x),$$

et utiliser le fait que $(x | y) + (y | x) = (x | y) + \overline{(x | y)} = 2\operatorname{Re}(x | y)$ dans le cas réel, et $= 2\operatorname{Re}(x | y)$ dans le cas complexe. ■

Théorème 2.2.1 (inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tous $x, y \in H$:

$$|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Exemple. Dans le cas où $H = L^2(m)$, elle est équivalente à l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales :

$$\left| \int_S f g dm \right| \leq \int_S |f g| dm \leq \left(\int_S |f|^2 dm \right)^{1/2} \left(\int_S |g|^2 dm \right)^{1/2}$$

■ **Preuve.** On ne la fera que dans le cas complexe ; c'est un peu plus facile dans le cas réel (on considère le signe du produit scalaire au lieu de son argument). En fait la preuve est valable même pour les semi-produits scalaires, c'est-à-dire si la forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) est seulement positive (c'est-à-dire que l'on ne demande pas que $(x|x) = 0$ entraîne $x = 0$).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(e^{-i\theta}x | y) = e^{-i\theta}(x | y) \in \mathbb{R}_+$$

(si $(x | y) \neq 0$, θ est l'argument du nombre complexe $(x | y)$). Posons $x' = e^{-i\theta}x$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a, par la Proposition 2.2.1 :

$$\|x'\|^2 + 2\operatorname{Re}(x' | y)t + \|y\|^2 t^2 = \|x' + ty\|^2 \geq 0.$$

Si $\|y\| = 0$, on a $\|x'\|^2 + 2\operatorname{Re}(x' | y)t \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; cela n'est possible que si $\operatorname{Re}(x' | y) = 0$. Si $\|y\| \neq 0$, on a un trinôme du second degré en t , qui est toujours positif ou nul ; son discriminant doit être négatif ou nul :

$$\operatorname{Re}(x' | y) - \|x'\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$$

Comme :

$$(x' | y) = e^{-i\theta}(x | y) = |(x | y)| \in \mathbb{R}_+$$

on a :

$$\operatorname{Re}(x' | y) = (x' | y) = |(x | y)|.$$

Comme, de plus, $\|x'\| = \|x\|$, on obtient l'inégalité annoncée. ■

Corollaire 2.2.1. L'expression $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ définit une norme sur H , appelée norme hilbertienne.

Preuve. Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

Corollaire 2.2.2. pour chaque $y \in H$, la forme linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \Phi_y : & H & \longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto (x | y) \end{array}$$

est continue. Sa norme dans H^* est $\|\Phi_y\| = \|y\|$.

Preuve. On peut supposer $y \neq 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que :

$$|\Phi_y(x)| = |(x | y)| \leq \|y\|\|x\|;$$

cela prouve que Φ_y est continue et que $\|\Phi_y\| \leq \|y\|$.

Comme $\Phi_y(y) = \|y\|^2$, on a $\|\Phi_y\| \geq \frac{|\Phi_y(y)|}{\|y\|} = \|y\|$. ■

Remarque importante. Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Lorsque l'on regarde la preuve de l'inégalité (dans le cas d'un produit scalaire), on voit que l'on a $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$ si et seulement si $y = 0$ ou bien si $y \neq 0$ et le discriminant du trinôme du second degré en t est nul ; cela signifie que ce trinôme possède une racine (double) : il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\|x' + t_0 y\| = 0$; autrement dit $e^{-i\theta}x + t_0 y = 0$: les vecteurs x et y sont **linéairement liés**.

Inversement, si x et y sont linéairement dépendants, il est clair que l'on a égalité. ■

2.2.1 Orthogonalité

Définition 2.2.1. On dit que deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien H sont orthogonaux si $(x|y) = 0$. On note $x \perp y$.

Exemple. Dans $H = \mathbb{R}^2$, pour le produit scalaire usuel, on a $(-1, 1) \perp (1, 1)$.

Notons que la relation d'orthogonalité est symétrique : si $x \perp y$, alors $y \perp x$ (car $(y|x) = (x|y)$).

D'après la Proposition 2.2.1, on a, dans le cas réel :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

ce que l'on peut appeler le "Théorème de Pythagore".

Dans le cas complexe :

$$x \perp y \iff [\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ et } \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2].$$

En effet, pour tout nombre complexe a , on a $Im(a) = Re(-ia)$ et par conséquent $Im(x|y) = Re(x|iy)$.

Des parties $A, B \subseteq H$ sont dites **orthogonales** si tout $x \in A$ est orthogonal à tout $y \in B$:

$$x \perp y, \quad \forall x \in A, \forall y \in B.$$

On dit aussi que l'une est orthogonale à l'autre. ■

Définition 2.2.2. L'orthogonal d'une partie $A \subseteq H$ est l'ensemble :

$$A^\perp = \{y \in H; y \perp x, \forall x \in A\}$$

On a $B^\perp \subseteq A^\perp$ si $A \subseteq B$; donc en particulier $(\bar{A})^\perp \subseteq A^\perp$; mais la continuité des applications $\Phi_y : x \mapsto (x|y)$ entraîne que $(\bar{A})^\perp = A^\perp$.

Proposition 2.2.2. Pour toute partie A de H , $A^\perp$ est orthogonal à A ; c' est la plus grande partie orthogonale à A .

De plus $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H .

Preuve. Le début est clair. Pour le reste, remarquons que :

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \ker \Phi_x$$

et que chaque sous-espace vectoriel $\ker \Phi_x = \Phi_x^{-1}(\{0\})$ est fermé puisque Φ_x est continue. ■

2.2.2 Espaces de Hilbert

Définition 2.2.3. Si un espace préhilbertien est complet, pour sa norme hilbertienne, on dit que c'est un **espace de Hilbert**.

C'est donc un cas particulier d'espace de Banach. **Exemples.** 1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. Lorsque le corps de base est réel, on dit que c'est un espace euclidien, et que c'est un espace hermitien lorsque le corps de base est complexe.

2) Pour toute mesure positive m , $L^2(m)$ est un espace de Hilbert, en vertu du Théorème de Riesz-Fisher, puisque la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_S |f(t)|^2 dm(t) \right)^{1/2}$$

est la norme hilbertienne associée au produit scalaire usuel :

$$(f|g) = \int_S f(t) \overline{g(t)} dm(t).$$

En particulier, ℓ_2 est un espace de Hilbert. ■

2.3 Le Théorème de projection et ses conséquences

2.3.1 Le Théorème de projection

C'est grâce à ce théorème que l'on obtient toutes les "bonnes" propriétés des espaces de Hilbert.

Rappelons d'abord qu'une partie C d'un espace vectoriel est dite convexe si le segment $[x, y]$ est contenu dans C dès lors que $x, y \in C$:

$$x, y \in C \implies [x, y] \subseteq C,$$

où $[x, y] = tx + (1 - t)y; t \in [0, 1]$.

sous-espace vectoriel est convexe ; toute boule est convexe.

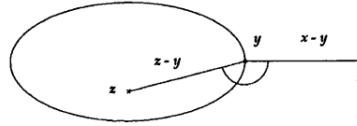
Théorème 2.3.1 (Théorème de projection). *Soit H un espace de **Hilbert** et soit C une partie **convexe** et **fermée**, non vide, de H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que :*

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, C).$$

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C . Il est caractérisé par la propriété :

$$y \in C \text{ et } \text{Re}(x - y | z - y) \leq 0, \forall z \in C. \quad (*)$$

Dans le cas réel, l'inégalité dans la caractérisation (*) signifie que l'angle $\alpha = \widehat{(x - y, z - y)}$ est obtus.



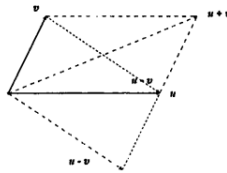
Notons que la complétude de H n'est pas absolument indispensable : on peut la supprimer, mais en supposant que c'est C qui est complet.

Preuve. 1) Existence. On aura besoin du lemme suivant, dont la preuve est immédiate, avec la Proposition 2.2.1.

Lemme 2.3.1 (identité du parallélogramme). *Pour tous $u, v \in H$:*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Cela signifie que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des quatre côtés.



Soit $d = \text{dist}(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

Notons que si $d = 0$, alors $x \in C$ (car C est fermé), et $y = x$ est l'unique point de C tel que $\|x - y\| = d$. Pour tout $n > 1$, il existe $z_n \in C$ tel que :

$$\|x - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$$

Appliquons alors, pour $n, p \geq 1$, l'identité du parallélogramme à $u = x - z_n$ et $v = x - z_p$; on obtient :

$$4 \left\| x - \frac{z_n + z_p}{2} \right\|^2 + \|z_n - z_p\|^2 = 2 \left(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_p\|^2 \right).$$

Mais, C étant convexe, on a $\frac{z_n + z_p}{2} \in C$; donc :

$$\left\| x - \frac{z_n + z_p}{2} \right\| \geq d$$

de sorte que l'on obtient :

$$\|z_n - z_p\|^2 \leq 2 \left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{p} \right) - 4d^2 = 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right).$$

La suite $(z_n)_n$ est par conséquent une suite de Cauchy. Comme H est complet, elle converge donc vers un élément $y \in H$. Mais comme C est fermé, on a en fait, puisque les z_n sont dans C , $y \in C$.

De plus, le fait que $\|x - z_n\|^2 \leq d^2 + 1/n$ entraîne, en passant à la limite, que $\|x - y\| \leq d$. On a donc $\|x - y\| = d$, puisque $y \in C$. 2) Unicité. Si $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$, avec $y_1, y_2 \in C$, alors, comme ci-dessus, l'identité du parallélogramme donne :

$$\begin{aligned} 4d^2 + \|y_1 - y_2\|^2 &\leq 4 \left\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 \\ &= 2 \left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2 \right) = 2(d^2 + d^2) \end{aligned}$$

d'où $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$, ce qui n'est possible que si $y_1 = y_2$.

3) Preuve de (*).

a) Si $z \in C$, on a $(1 - t)y + tz \in C$ pour $0 \leq t \leq 1$, par la convexité de C ; donc :

$$\|x - (1 - t)y - tz\|^2 \geq \|x - y\|^2,$$

soit en développant $\|x - (1 - t)y - tz\|^2 = \|(x - y) + t(y - z)\|^2$ avec la Proposition 2.2.1 :

$$t^2\|y - z\|^2 + 2t \operatorname{Re}(x - y \mid y - z) \geq 0.$$

Pour $t \neq 0$, divisons par t , puis faisons ensuite tendre t vers 0 ; il vient $\operatorname{Re}(x - y \mid y - z) \geq 0$, soit :

$$\operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leq 0.$$

b) Réciproquement, si y vérifie (*), on a, pour tout $z \in C$:

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x - y \mid y - z) \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 - 2 \operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \geq \|x - y\|^2; \end{aligned}$$

donc $y = P_C(x)$, par unicité . ■

2.3.2 Conséquences

Proposition 2.3.1. *L'application $P_C : H \rightarrow C$ est continue ; plus précisément, on a , pour tous $x_1, x_2 \in H$:*

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Preuve. Posons $y_1 = P_C(x_1)$ et $y_2 = P_C(x_2)$; la condition (*) donne :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(x_1 - y_1 \mid z - y_1) \leq 0 & \forall z \in C; \\ \operatorname{Re}(x_2 - y_2 \mid z' - y_2) \leq 0 & \forall z' \in C. \end{cases}$$

En prenant $z = y_2$ et $z' = y_1$, et en additionnant, il vient :

$$\operatorname{Re}([x_1 - y_1] - [x_2 - y_2] \mid y_2 - y_1) \leq 0.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \operatorname{Re} \|y_1 - y_2\|^2 = \operatorname{Re}([y_2 - x_2] + [x_2 - x_1] + [x_1 - y_1] \mid y_2 - y_1) \\ &= \operatorname{Re}([x_1 - y_1] - [x_2 - y_2] \mid y_2 - y_1) + \operatorname{Re}(x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1) \\ &\leq \operatorname{Re}(x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1) \\ &\leq |(x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1)| \leq \|x_2 - x_1\| \|y_2 - y_1\| \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il en résulte, en divisant par $\|y_2 - y_1\|$ (que l'on peut supposer non nul, car sinon le résultat est évident), que l'on a bien $\|y_1 - y_2\| \leq \|x_2 - x_1\|$. ■ Dans le cas où le convexe C est un sous-espace vectoriel, on a de meilleures propriétés.

Théorème 2.3.2. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H , alors l'application $P_F : H \rightarrow F$ est une application linéaire continue, et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que :*

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp.$$

Preuve. Preuve. D'abord, si $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$, on a :

$$\operatorname{dist}(x, F)^2 = \inf_{z \in F} \|x - z\|^2 = \inf_{z \in F} [\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2] = \|x - y\|^2;$$

donc $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$ et $y = P_F(x)$. La réciproque résulte de la condition (*) :

$$\operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leq 0, \quad \forall z \in F;$$

en effet, comme F est un sous-espace vectoriel, on a :

$$z = y + \lambda w \in F, \quad \forall w \in F \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Lorsque H est réel, on a donc, pour tout $w \in F$:

$$\lambda(x - y \mid w) = (x - y \mid \lambda w) \leq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ce qui n'est possible que si $(x - y \mid w) = 0$. Lorsque l'espace H est complexe, on a, de même, pour tout $w \in F$:

$$\lambda \operatorname{Re}(x - y \mid w) = \operatorname{Re}(x - y \mid \lambda w) \leq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

et, avec $z = y + i\lambda w$:

$$\lambda \operatorname{Im}(x - y \mid w) = \operatorname{Re}(x - y \mid i\lambda w) \leq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ce qui, de nouveau, n'est possible que si $(x - y \mid w) = 0$. La linéarité de P_F est alors facile à voir, grâce à l'unicité; en effet, si $y_1 = P_F(x_1)$, $y_2 = P_F(x_2)$, alors $(x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \in F^\perp$; donc, pour $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $(a_1 x_1 + a_2 x_2) - (a_1 y_1 + a_2 y_2) \in F^\perp$; donc $P_F(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 y_1 + a_2 y_2$. ■

Notons que la continuité a été vue à la Proposition 2.3.1, et qu'en prenant $x_2 = 0$ dans cette proposition, on a : $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in H$; la norme de P_F est donc ≤ 1 . Mais comme $P_F(x) = x$ pour tout $x \in F$, on obtient, si $F \neq \{0\}$, que $\|P_F\| = 1$.

A titre d'exercice, on pourra montrer que, pour un convexe fermé C , P_C est linéaire si et seulement si C est un sous-espace vectoriel.

Théorème 2.3.3. *Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout sous espace vectoriel fermé, on a :*

$$H = F \oplus F^\perp,$$

et la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ associée est P_F . Elle est donc continue, de sorte que la somme directe est une somme directe topologique. On dit que P_F est la projection orthogonale sur F .

Le fait que H soit la somme directe de F et $F^\perp$ signifie que tout $x \in H$ s'écrit, de façon unique, $x = y + z$, avec $y \in F, z \in F^\perp$. Notons que, puisque F et $F^\perp$ sont orthogonaux, on a : $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$; en d'autres termes :

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2.$$

On retrouve le fait que P_F est continue et de norme 1, si $F \neq \{0\}$. On voit aussi que $\|Id_H - P_F\| = 1$, si $F^\perp \neq \{0\}$; mais on verra juste après qu'en fait $Id_H - P_F$ est la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Preuve. On a $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$, avec $x - P_F(x) \in F^\perp$, par le Théorème II.2.4. D'autre part, si $x \in F \cap F^\perp$, on a, en particulier, $(x | x) = 0$; donc $x = 0$. ■

Remarque. Le Théorème 2.3.3 est vraiment spécifique aux espaces de Hilbert; en effet, J. Lindenstrauss et L. Tzafriri ont montré en 1971 que si E est un espace de Banach dans lequel tout sous-espace vectoriel fermé est l'image d'une projection continue, alors cet espace E est isomorphe à un espace de Hilbert. La preuve repose sur le Théorème de Dvoretzky, disant que tout sous-espace vectoriel de dimension finie n d'un espace normé contient un sous-espace vectoriel, de dimension "assez grande", de l'ordre de $\log n$, qui est très proche d'un espace de Hilbert (voir le Chapitre 8 du livre : D. Li H. Queffélec, Introduction à l'étude des espaces de Banach - Analyse et Probabilités, Cours Spécialisés 12, Société Mathématique de France, 2004).

Le résultat suivant peut être montré directement, mais il est facilement obtenu à partir du Théorème 2.3.3 ■

Corollaire 2.3.1. On a $F^{\perp\perp} = \bar{F}$ pour tout sous-espace vectoriel F de l'espace de Hilbert H .

Preuve. Comme $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé, par la Proposition 2.2.2, on $H = F^{\perp\perp} \oplus F^\perp$.

D'autre part, on peut aussi appliquer ce théorème au sous-espace vectoriel fermé $\bar{F}$: $H = \bar{F} \oplus (\bar{F})^\perp = \bar{F} \oplus F^\perp$. Il en résulte, puisque l'on sait que $\bar{F} \subseteq F^{\perp\perp}$, que $F^{\perp\perp} = \bar{F}$. ■

Notons qu'en général un sous-espace vectoriel a une infinité de supplémentaires; mais il n'a qu'un seul supplémentaire orthogonal.

On en déduit, puisque $H^\perp = 0$ et $0^\perp = H$, le critère **très pratique** suivant de densité.

Corollaire 2.3.2. Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace vectoriel de H . Alors F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = 0$.

Ainsi, pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est **dense** dans H , il suffit de vérifier que :

$$[(x|y) = 0, \quad \forall x \in F] \implies y = 0.$$

Voyons un exemple d'application. Rappelons que le support de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, noté $\text{supp } f$, est l'adhérence de $x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0$.

Théorème 2.3.4. L'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Ce théorème se démontre, sous une forme plus générale d'ailleurs, dans tout cours d'Intégration (voir aussi le Théorème III.1.2); mais il s'agit ici, même si le résultat est important par lui-même, de voir comment appliquer le Corollaire 2.3.2

Notons que $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ n'est pas réellement contenu dans $L^2(\mathbb{R})$, puisque ce dernier est un espace de classes d'équivalence de fonctions, mais, comme deux applications continues qui sont égales presque partout, pour la mesure de Lebesgue, le sont en fait partout, l'application canonique $j : \mathcal{K}(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, qui associe à chaque fonction sa classe d'équivalence, est injective; on peut donc identifier chaque $\tilde{f} \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ à sa classe d'équivalence $j(f)$, c'est-à-dire $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ à $j[\mathcal{K}(\mathbb{R})]$.

Preuve. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$(f | g) = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} d\lambda = 0, \quad \forall f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}).$$

On veut montrer que $g = 0$.

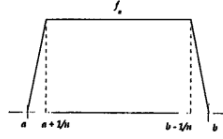
En prenant les parties réelles et imaginaires, on peut supposer que g est à valeurs réelles, et l'on écrit $g = g^+ - g^-$. On a, pour toute $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g^+(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g^-(t)dt.$$

Soit $a < b$. Il existe des $f_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} 0 \leq f_n \leq \mathbf{1}_{]a,b[} \\ f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{1}_{]a,b[}(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et telles que la suite $(f_n)_n$ soit croissante.



Le Théorème de convergence monotone donne :

$$\int_a^b g^+(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_{\mathbb{R}} f_n(t)g^+(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \int_{\mathbb{R}} f_n(t)g^-(t)dt = \int_a^b g^-(t)dt.$$

Cela veut dire que les mesures positives $\mu = g^+.\lambda$ et $\nu = g^-.\lambda$ sont égales sur tous les intervalles $]a,b[$ et y prennent des valeurs finies :

$$\int_a^b g^+(t)dt \leq \int_a^b |g(t)|dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\mathbb{I}_{[a,b]}(t)dt \leq \sqrt{b-a}\|g\|_2 < +\infty,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le Théorème d'unicité des mesures dit alors que $\mu = \nu$. Cela signifie que $g^+ = g^-$ presque partout, c'est-à-dire $g = 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. ■

Corollaire 2.3.3. $\mathcal{C}([0,1])$ est dense dans $L^2(0,1)$.

Preuve. Soit $f \in L^2(0,1)$. Prolongeons-la en $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ par 0 en dehors de $[0,1]$. On a $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \varepsilon$. Soit $h = g|_{[0,1]}$ la restriction de g à $[0,1]$. On a, d'une part, $h \in \mathcal{C}([0,1])$ et, d'autre part, $\|f - h\|_{L^2(0,1)} \leq \|\tilde{f} - g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \varepsilon$. ■

2.3.3 Représentation du dual

Rappelons que le dual est :

$$H^* = \{\Phi : H \rightarrow \mathbb{K}; \Phi \text{ linéaire continue}\},$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps de base.

Savoir donner une représentation "concrète" du dual d'un espace fonctionnel permet souvent de résoudre des problèmes sur l'espace lui-même. Dans le cas des espaces de Hilbert, c'est particulièrement simple.

Rappelons d'abord que nous avons vu que, pour tout $y \in H$, la forme linéaire $\Phi_y : x \in H \rightarrow (x|y)$ est continue, c'est-à-dire est un élément du dual H^* , et que $\|\Phi_y\| = \|y\|$. Il s'avère que tous les éléments du dual sont de cette forme.

Théorème 2.3.5 (Théorème de représentation de Fréchet-Riesz). *Soit H un espace de Hilbert. Pour toute $\Phi \in H^*$, il existe un (unique) $y \in H$ tel que $\Phi(x) = (x|y)$ pour tout $x \in H$.*

Ce théorème a été prouvé, de façon indépendante, par $M.$ Fréchet et $F.$ Riesz en 1907, pour $H = L^2(0, 1)$; les deux articles ont été publiés, par coïncidence, dans le même numéro des Notes aux Comptes-rendus de l'Académie des Sciences.

Une autre façon de voir ce théorème est de dire que l'application :

$$\begin{aligned} J : H &\longrightarrow H^* \\ y &\longmapsto \Phi_y = J(y) \end{aligned}$$

est surjective. Elle est donc bijective car c'est une isométrie (au sens des espaces métriques) : $\|J(y) - J(y')\| = \|\Phi_y - \Phi_{y'}\| = \|\Phi_{y-y'}\| = \|y - y'\|$.

Notons que dans le cas réel, J est linéaire, mais que dans le cas complexe, elle n'est que semi-linéaire.

Preuve. Nous savons déjà que J est une isométrie métrique ; cela prouve l'unicité. Ce qu'il faut voir, c'est la surjectivité.

Soit $\Phi \in H^*$, non nulle. Comme Φ est continue, le sous-espace vectoriel $F = \ker \Phi$ est fermé. Donc :

$$H = (\ker \Phi) \oplus (\ker \Phi)^\perp.$$

Mais comme Φ est une forme linéaire non nulle, $\ker \Phi$ est de codimension 1 ; donc $(\ker \Phi)^\perp$ est de dimension 1 .

Soit $u \in (\ker \Phi)^\perp$, de norme 1 , et posons $y = \overline{\Phi(u)}u$. Alors, comme $y \in (\ker \Phi)^\perp$, Φ_y est nulle sur $\ker \Phi$; mais, d'autre part :

$$\Phi_y(u) = (u | y) = \Phi(u)(u | u) = \Phi(u)\|u\|^2 = \Phi(u)$$

Ainsi l'on a bien $\Phi = \Phi_y$. ■

Remarque. La valeur $y = \Phi(\bar{u})u$ peut sembler "tomber du ciel". En fait, si l'on veut avoir $\Phi(x) = (x|y)$ pour tout $x \in H$, on doit l'avoir pour $x \in \ker \Phi$; donc y doit être dans $(\ker \Phi)^\perp$. Ainsi $y = cu$, et l'égalité $\Phi(u) = (u|y)$ entraîne $\Phi(u) = \bar{c}(u|u) = \bar{c}\|u\|^2 = \bar{c}$. On a donc forcément $y = \Phi(u)u$. ■

2.3.4 Adjoint d'un opérateur

On appelle opérateur sur H toute application linéaire continue $T : H \rightarrow H$.

Proposition 2.3.2. Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un autre opérateur, noté T^* , et appelé l'adjoint de T , tel que :

$$\boxed{(Tx|y) = (x|T^*y)}, \quad \forall x, y \in H.$$

De plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Preuve. Soit $y \in H$. L'application :

$$\begin{aligned} \Phi_y \circ T : H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto (Tx | y) \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur H ; il existe donc, par le Théorème de Fréchet-Riesz, un unique élément de H , que l'on notera T^*y , tel que :

$$(x | T^*y) = (Tx | y), \quad \forall x \in H.$$

A cause de l'unicité, l'application $T^* : y \in H \mapsto T^*y \in H$ est clairement linéaire : si $y_1, y_2 \in H$ et $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, on a, pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned} (x | T^*(a_1y_1 + a_2y_2)) &= (Tx | a_1y_1 + a_2y_2) = \bar{a}_1 (Tx | y_1) + \bar{a}_2 (Tx | y_2) \\ &= \bar{a}_1 (x | T^*y_1) + \bar{a}_2 (x | T^*y_2) = (x | a_1T^*y_1 + a_2T^*y_2) \end{aligned}$$

donc $T^*(a_1y_1 + a_2y_2) = a_1T^*y_1 + a_2T^*y_2$.

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|(\Phi_y \circ T)(x)| = |(Tx | y)| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\| ;$$

donc $\|T^*y\| = \|\Phi_y \circ T\| \leq \|T\| \|y\|$. Cela prouve que l'application linéaire T^* est continue et que $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Pour voir que $\|T\| \leq \|T^*\|$, remarquons que T^* a lui-même un adjoint T^{**} , et que l'on a $T^{**} = T$:

$$(y | T^{**}x) = (T^*y | x) = (y | Tx)$$

pour tous $x, y \in H$; cela implique que $T^{**}x = Tx$ pour tout $x \in H$. Alors $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$ ■

2.4 Bases orthonormées

Pour éviter de parler de familles sommables, on se restreindra aux espaces **séparables**. Pour le cas général, on pourra se reporter, par exemple, au livre de G. Choquet, Cours d'Analyse, Masson.

2.4.1 Espaces séparables

Définition 2.4.1. Une espace topologique E est dit séparable s'il existe une partie $D \subseteq E$ qui est dénombrable et dense dans E : $\bar{D} = E$.

Dans le cas des espaces normés, on a une notion équivalente.

Proposition 2.4.1. Soit E un espace vectoriel normé. Pour que E soit séparable, il faut et il suffit qu'il existe dans E une partie Δ qui soit dénombrable et **totale** dans E .

On dit qu'une partie Δ d'un espace vectoriel normé E est totale lorsque le sous espace vectoriel $\text{vect}(\Delta)$ engendré par cette partie est dense.

Preuve. Le $\mathbb{Q}$ -sous-espace vectoriel (respectivement le $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ -sous-espace vectoriel) engendré par Δ est dénombrable et son adhérence est la même que celle de $\text{vect}(\Delta)$. ■ **Exemples.** 1) Tout espace vectoriel de dimension finie est séparable. 2) Les espaces c_0 et ℓ_p , pour $1 \leq p < \infty$, sont séparables, car si

$$\begin{array}{c} e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ \uparrow \\ n^{i2me} \text{ place} \end{array}$$

alors $\Delta = \{e_n; n \geq 1\}$ est totale, puisque, pour tout $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell_p$, on a :

$$\|x - (\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n)\|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et lorsque $x \in c_0$:

$$\|x - (\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n)\|_{\infty} = \sup_{k \geq n+1} |\xi_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On peut montrer (Exercice 19 du Chapitre I) que ℓ_{∞} n'est pas séparable. ■

Proposition 2.4.2. Tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable.

Preuve. Soit E un espace métrique séparable, $D = \{x_n; n \geq 1\}$ une partie de E dénombrable dense, et $F \subseteq E$. Pour tout couple d'entiers $n, k \geq 1$ tels que $F \cap B(x_n, 1/k)$ ne soit pas vide, choisissons un élément $y_{n,k} \in F \cap B(x_n, 1/k)$; sinon (pour des questions de notation), posons $y_{n,k} = y_0$, où y_0 est

un élément fixe donné de F (on peut supposer F non vide). Alors $D_F = \{y_{n,k}; n, k \geq 1\}$ est une partie dénombrable de F , et elle est dense dans F : soit $y \in F$; il existe, pour tout $k \geq 1$, un entier $n \geq 1$ tel que $d(y, x_n) \leq 1/k$; on a donc $y \in B(x_n, 1/k)$; donc $F \cap B(x_n, 1/k) \neq \emptyset$, et $y_{n,k} \in F \cap B(x_n, 1/k)$; alors $d(y, y_{n,k}) \leq d(y, x_n) + d(x_n, y_{n,k}) \leq 2/k$. ■

Remarque. Ce n'est pas vrai dans les espaces topologiques généraux. En effet, pour tout ensemble I , il existe un "gros" espace compact βI , appelé compactifié de Stone-Čech de I dans lequel I est dense (il a la propriété que toute fonction bornée sur I à valeurs scalaires se prolonge de façon unique en une fonction continue sur βI , avec les mêmes bornes). Le compactifié de Stone-Čech $\beta \mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ est donc séparable; mais on peut montrer que $\beta \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ n'est pas séparable.

Notons que, d'après la propriété de prolongement, l'espace $\mathcal{C}(\beta \mathbb{N})$ des fonctions continues sur $\beta \mathbb{N}$ est isométrique à ℓ_∞ . Alors c_0 est isométrique au sous-espace $\{f \in \mathcal{C}(\beta \mathbb{N}); f(x) = 0 \text{ pour } x \in \beta \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$. La non séparabilité de l'espace topologique $\beta \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ correspond à la non séparabilité de l'espace de Banach quotient ℓ_∞ / c_0 . ■

2.4.2 Systèmes orthonormés

Nous supposons dans la suite que H est un espace préhilbertien, de **dimension infinie**.

Définition 2.4.2. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H , indexée par un ensemble arbitraire I , non vide. On dit que c'est une **famille orthonormée**, ou un **système orthonorme**, si :

- 1) $\|u_i\| = 1, \forall i \in I$;
- 2) $u_i \perp u_j, \forall i \neq j$.

Notons que tout sous-système $(u_i)_{i \in J}$ ($J \subseteq I$) d'un système orthonormé $(u_i)_{i \in I}$ est encore orthonormé.

- Exemples.** 1) Dans ℓ_2 , la suite $(e_n)_{n \geq 1}$ est orthonormée.
 2) Dans $L^2(0, 1)$, on pose :

$$e_n(t) = e^{2\pi i n t}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

le système $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormé; on dit que c'est le **système trigonométrique**. ■

Proposition 2.4.3. Si le système fini $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormé, alors, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$:

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$$

Preuve. Il suffit de développer en utilisant la Proposition II.1.3 :

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|a_k u_k\|^2 + \sum_{k \neq j} (a_k u_k \mid a_j u_j),$$

et d'utiliser que $\|a_k u_k\| = |a_k| \|u_k\| = |a_k|$ et que, pour $k \neq j$, $(a_k u_k \mid a_j u_j) = a_k \bar{a}_j (u_k \mid u_j) = 0$

■

Corollaire 2.4.1. Toute famille orthonormée est libre (c'est-à-dire que les vecteurs la composant sont linéairement indépendants).

Proposition 2.4.4 (Inégalité de Bessel). Soit H un espace préhilbertien. Pour toute famille orthonormée $(u_i)_{i \in I}$ dans H , on a, pour tout $x \in H$:

$$\sum_{i \in I} |(x \mid u_i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dans l'inégalité ci-dessus, la somme au premier membre est définie de la façon suivante : si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels positifs, alors :

$$\sum_{i \in I} a_i \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{J \subseteq I, J \text{ finie}} \sum_{i \in J} a_i$$

Si $\ell_2(I) = \left\{ (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I; \sum_{i \in I} |a_i|^2 < +\infty \right\}$, l'inégalité de Bessel entraîne que l'on a une application :

$$\begin{aligned} S: H &\longrightarrow \ell_2(I) \\ x &\longmapsto ((x|u_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

elle est linéaire, et l'inégalité de Bessel dit de plus qu'elle est continue, et de norme ≤ 1 .

Preuve. Si $\xi_i = (x|u_i)$, on a, puisque la famille est orthonormée, pour toute partie finie J de I :

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i \in J} \xi_i u_i \right\|^2 = \|x\|^2 - 2 \sum_{i \in J} \operatorname{Re}(x|\xi_i u_i) + \sum_{i \in J} |\xi_i|^2$$

ce qui donne le résultat car $(x|\xi_i u_i) = \bar{\xi}_i (x|u_i) = \bar{\xi}_i \xi_i = |\xi_i|^2$. ■

Proposition 2.4.5. Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite orthonormée dans H . Si un vecteur $x \in H$ peut s'écrire $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$, alors on a forcément $\boxed{\xi_n = (x|u_n)}$ pour tout $n \geq 1$.

Ici "suite" signifie "famille dénombrable".

Preuve. Pour chaque $k \geq 1$, la forme linéaire Φ_{u_k} est continue; donc :

$$(x|u_k) = \Phi_{u_k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{u_k}(\xi_n u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (u_n|u_k) = \xi_k.$$

■

Proposition 2.4.6. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite orthonormée et $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$. Soit F_n le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$. Alors :

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k u_k$$

Preuve. Comme on a $\xi_k = (x|u_k)$, par la proposition précédente, on obtient que $(x - \sum_{k=1}^n \xi_k u_k|u_j) = 0$ pour tout $j \leq n$; donc si $y_n = \sum_{k=1}^n \xi_k u_k$, on a $x - y_n \in F_n^\perp$. Comme $y_n \in F_n$, la caractérisation du Théorème II.2.4 dit que $y_n = P_{F_n}(x)$. ■

Proposition 2.4.7. Si H est un espace de Hilbert, et $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite orthonormée dans H , alors, pour toute suite $(\xi_n)_{n \geq 1} \in \ell_2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$ converge dans H .

En d'autres termes (en utilisant la Proposition 2.4.5), l'application linéaire continue :

$$\begin{aligned} S: H &\longrightarrow \ell_2 \\ x &\longmapsto ((x|u_n))_{n \geq 1} \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve. Il suffit de remarquer que la série vérifie le critère de Cauchy, car la Proposition 2.4.3 donne :

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} \xi_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^{n+p} |\xi_k|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

uniformément en p . ■

2.4.3 Bases orthonormées

Définition 2.4.3. On dit qu'une suite orthonormée $(u_n)_{n \geq 1}$ dans un espace préhilbertien H est une **base orthonormée** de H si l'ensemble $u_n; n \geq 1$ est total dans H . On dit aussi que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une **base hilbertienne**.

Notons que, comme on s'est restreint à prendre des familles dénombrables, l'espace H sera forcément séparable.

D'autre part, il faut noter que cette notion de base orthonormée est, en dimension infinie, différente de la notion de base, au sens algébrique du terme : une famille de vecteurs d'un espace vectoriel est une base si tout vecteur peut s'écrire, de façon unique, comme combinaison linéaire d'un nombre fini de termes de la famille ; or le théorème qui suit dit que, pour une base orthonormée, tout élément s'écrit comme la somme d'une série, qui fait intervenir tous les termes de la base orthonormée.

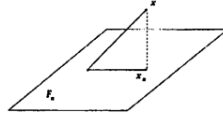
Théorème 2.4.1. Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une base orthonormée de H . Alors, tout élément $x \in H$ s'écrit :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, \quad \text{avec} \quad \xi_n = (x | u_n)$$

De plus, pour tous $x, y \in H$, on a les **formules de Parseval** :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x | u_n)|^2 ; \\ 2) \quad & (x | y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x | u_n) \overline{(y | u_n)}, \text{ la série convergeant absolument.} \end{aligned}$$

Preuve. Notons F_n le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$, et posons $x_n = P_{F_n}(x)$.



L'ensemble $u_n; n \geq 1$ étant total, le sous espace $\cup_{n \geq 1} F_n$ est dense dans H ; alors, la suite $(F_n)_{n \geq 1}$ étant croissante, on a :

$$\|x - x_n\| = \text{dist}(x, F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'autre part, d'après le Corollaire 2.4.1, $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base, au sens usuel, de F_n ; et, par la Proposition 2.4.5, on a donc :

$$x_n = \sum_{k=1}^n (x_n | u_k) u_k.$$

Mais $(x - x_n) \in F_n^\perp$; donc, pour $k \leq n$, $(x_n | u_k) = (x | u_k) = \xi_k$ ne dépend pas de n . On a donc bien :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k.$$

De même $y = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k u_k$, avec $\zeta_k = (y | u_k)$. Alors, par continuité (Corollaire 2.2.2) :

$$(x | y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k \mid y \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (u_k | y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\zeta_k},$$

qui donne l'autre identité lorsque $y = x$. ■ Il résulte du Théorème 2.4.1 et de la Proposition 2.4.7 que l'on a :

Corollaire 2.4.2. *Soit H un espace de Hilbert, séparable, et soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une base orthonormée de H . Alors l'application linéaire :*

$$\begin{aligned} S : H &\longrightarrow \ell_2 \\ x &\longmapsto ((x|u_n))_{n \geq 1} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, c'est-à-dire un isomorphisme conservant le produit scalaire : $(S(\xi)|S(\zeta)) = (\xi|\zeta)$ pour tous $\xi, \zeta \in \ell_2$.

C'est en particulier une isométrie $\|S(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$. Lorsque H n'est pas complet, on a toujours une isométrie conservant le produit scalaire, mais elle n'est pas surjective.

L'isomorphisme réciproque est :

$$\begin{aligned} S^{-1} : \ell_2 &\longrightarrow H \\ (\xi_n)_{n \geq 1} &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n \end{aligned}$$

Nous allons voir qu'en fait tout espace de Hilbert séparable possède des bases orthonormées, et donc le corollaire précédent s'applique à tous les espaces de Hilbert séparables.

2.4.4 Existence des bases orthonormées

Théorème 2.4.2. *Tout espace de Hilbert séparable possède des bases orthonormées.*

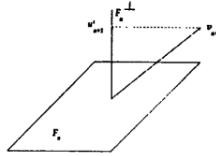
En fait la complétude ne sert pas ici (car à chaque étape, on ne travaille que dans des sous-espaces vectoriels de dimension finie, donc complets).

On obtient, comme conséquence du Théorème 2.4.2 et du Corollaire 2.4.2, le résultat essentiel suivant, dans lequel, cette fois-ci l'hypothèse de complétude ne peut être omise.

Théorème 2.4.3. *Tous les espaces de Hilbert séparables, de dimension infinie, sont isomorphes entre-eux, et en particulier à ℓ_2 .*

Preuve du Théorème 2.4.2. On utilise tout simplement le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Prenons une partie dénombrable $\{v_n; n \geq 1\}$ totale. On peut supposer que les $v_n, n \geq 1$, sont linéairement indépendants (en supprimant ceux qui sont combinaison linéaire des précédents).



Soit F_n le sous-espace vectoriel engendré par $v_1, \dots, v_n$. On pose $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, et

$$u'_{n+1} = P_{F_n^\perp}(v_{n+1}), \quad u_{n+1} = \frac{u'_{n+1}}{\|u'_{n+1}\|}$$

Alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est orthonormée, et l'ensemble $\{u_n; n \geq 1\}$ est total car le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$ est F_n . En effet, par le Théorème 2.3.2, pour $2 \leq k \leq n$, on a $u'_k - v_k \in F_{k-1}^\perp = F_{k-1}$, et donc $u'_k \in F_k$ puisque $v_k \in F_k$ et $F_{k-1} \subseteq F_k$.

2.5 Séparabilité de $L^2(0, 1)$

2.5.1 Théorème de Stone-Weierstrass

C'est un théorème de densité dans l'espace $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ ou $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ des fonctions continues $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, où K est un espace compact. Selon que l'espace est réel ou complexe, il ne s'énonce pas de la même façon : il faut ajouter une hypothèse dans le cas complexe.

Cas réel

Théorème 2.5.1 (Théorème de Stone-Weierstrass, cas réel). *Soit K un espace compact et A une sous-algèbre de l'algèbre de Banach réelle $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$. On suppose de plus que :*

- a) *A sépare les points de K ;*
- b) *A contient les constantes.*

Alors A est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$.

Remarques.

- 1) Une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$ est un sous-espace vectoriel stable par multiplication.
- 2) Dire que A sépare les points de K signifie que si $x, y \in K$ sont distincts, alors il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.
- 3) L'hypothèse que A contienne les fonctions constantes n'est faite que pour éliminer le cas des sous-algèbres $A = \{f \in \mathcal{C}(K); f(a) = 0\}$ pour un $a \in K$ donné.

Notons que, A étant un sous-espace vectoriel, A contient les constantes si et seulement si $\mathbf{1} \in A$.

On obtient la conséquence immédiate suivante. ■

Théorème 2.5.2. *Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$; alors l'ensemble $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(K)$ de tous les polynômes réels à d variables, restreints à K , est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$.*

Théorème 2.5.3. *L'espace réel $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$ est séparable.*

Preuve. Nous savons que $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ est dense dans $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$. D'autre part, le Théorème II.4.2 nous dit que $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$. Donc $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ est dense dans $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$, parce que la norme uniforme sur $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ est plus fine que la norme de $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$: pour toute $f \in L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ telle que $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon/2$; il existe ensuite $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ tel que $\|g - p\|_{\infty} \leq \varepsilon/2$; mais alors $\|g - p\|_2 \leq \|g - p\|_{\infty} \leq \varepsilon/2$, et donc $\|f - p\|_2 \leq \varepsilon$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([0, 1])$ est engendré par la suite définie par :

$$p_0(t) = 1, \quad p_1(t) = t, \quad p_2(t) = t^2, \quad \dots, \quad p_n(t) = t^n,$$

pour obtenir la séparabilité de $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$.

Notons qu'au passage, nous avons prouvé la séparabilité de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$. ■

Corollaire 2.5.1. *$L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$ est isomorphe à l'espace réel ℓ_2 .*

C'est le théorème démontré par Fisher et Riesz en 1907. Le point essentiel étant le fait que $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$ soit complet.

Preuve du Théorème de Stone-Weierstrass.

Elle se fait en plusieurs étapes.

Étape 1. Il existe une suite de polynômes réels $(r_n)_{n \geq 0}$ qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction racine carrée $r : t \mapsto \sqrt{t}$.

Preuve. On définit $(r_n)_{n \geq 0}$ par récurrence, en partant de $r_0 = 0$ et en posant, pour tout $n \geq 0$:

$$r_{n+1}(t) = r_n(t) + \frac{1}{2} \left(t - [r_n(t)]^2 \right).$$

Il est clair, par récurrence, que les r_n sont des polynômes. De plus, pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq r_n(t) \leq \sqrt{t}$; en effet, par récurrence : on a, d'une part, $t - [r_n(t)]^2 \geq 0$ et donc $r_{n+1}(t) \geq r_n(t) \geq 0$, et d'autre part :

$$\sqrt{t} - r_{n+1}(t) = \left[\sqrt{t} - r_n(t) \right] \left[1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{t} + r_n(t) \right) \right] \geq 0$$

car $\sqrt{t} + r_n(t) \leq \sqrt{t} + \sqrt{t} = 2\sqrt{t} \leq 2$. Notons qu'au passage, on a vu que la suite $(r_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

Étant croissante et majorée, elle converge, vers une limite $r(t)$. La relation de récurrence montre que $r(t) = \sqrt{t}$. Reste à voir qu'il y a convergence uniforme. Première méthode : "à la main". Posons $\varepsilon_n(t) = \sqrt{t} - r_n(t)$. On a vu ci-dessus, puisque $r_n(t) \geq 0$, que :

$$0 \leq \varepsilon_{n+1}(t) = \varepsilon_n(t) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\sqrt{t} + r_n(t) \right) \right] \leq \varepsilon_n(t) \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2} \right)$$

donc :

$$\begin{aligned} 0 \leq \varepsilon_n(t) &\leq \varepsilon_0(t) \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2} \right)^n = \sqrt{t} \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2} \right)^n \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1/2} 2(1-x)x^n \quad (\text{poser } x = 1 - \sqrt{t}/2) \\ &= 2x_n(1-x_n)x_n^n \quad \text{avec } x_n = n/(n+1) \\ &= \frac{2}{n+1}x_n^n \leq \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

■ Deuxième méthode. Il suffit d'utiliser le théorème suivant.

Théorème 2.5.4 (Théorème de Dini). *Soit K un espace compact.*

Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de fonctions continues $u_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue $u : K \rightarrow \mathbb{R}$, la convergence est uniforme.

C'est bien sûr évidemment faux si l'on ne suppose pas la limite continue.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$.

Pour chaque $x \in K$, il existe un entier $N(x)$ tel que :

$$n \geq N(x) \implies 0 \leq u(x) - u_n(x) \leq \varepsilon/3.$$

Comme u et $u_{N(x)}$ sont continues, il existe un voisinage de x , que l'on peut prendre ouvert, tel que :

$$x' \in V(x) \implies \begin{cases} |u(x) - u(x')| \leq \varepsilon/3 \\ |u_{N(x)}(x') - u_{N(x)}(x)| \leq \varepsilon/3. \end{cases}$$

Comme K est compact, il existe $x_1, \dots, x_m \in K$ tels que :

$$K = \bigcup_{i=1}^m V(x_i).$$

Si $N = \max \{N(x_1), \dots, N(x_m)\}$, on a, pour $n \geq N$:

$$0 \leq u(x) - u_n(x) \leq \varepsilon, \quad \forall x \in K,$$

car x appartient à l'un des $V(x_i)$ et $n \geq N(x_i)$; donc :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u(x) - u_n(x) \leq u(x) - u_{N(x_i)}(x) \\ &\leq (u(x) - u(x_i)) + (u(x_i) - u_{N(x_i)}(x_i)) + (u_{N(x_i)}(x_i) - u_{N(x_i)}(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■ Étape 2. Si $f \in A$, alors $|f| \in \bar{A}$.

Preuve. En effet, on peut supposer $f \neq 0$. Soit $a = \|f\|_\infty$. On a $[f(x)]^2/a^2 \in [0, 1]$ pour tout $x \in K$. Mais, comme r_n est un polynôme, et A est une algèbre, on a $r_n(f^2/a^2) \in A$ si $f \in A$. En passant à la limite, on obtient :

$$|f| = a \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(f^2/a^2) \in \bar{A}$$

la limite étant uniforme, c'est-à-dire prise pour la norme de $\mathcal{C}_\mathbb{R}(K)$. ■

Étape 3. Si $f, g \in A$, alors $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \bar{A}$.

Preuve. Il suffit de remarquer que :

$$\begin{cases} \max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \\ \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \end{cases}$$

et d'utiliser l'Étape 2 (ainsi que le fait que $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel). ■

Étape 3 bis. Si $f, g \in \bar{A}$, alors $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \bar{A}$.

Preuve. Cela résulte de ce que $\bar{A}$ vérifie les conditions demandées pour A : elle reste une sous-algèbre (rappelons que la convergence dans $\mathcal{C}(K)$ est la convergence uniforme), et, puisque A contient les constantes et sépare les points de K , il en est a fortiori de même pour $\bar{A}$. ■

Bien sûr, par récurrence :

$$f_1, \dots, f_n \in \bar{A} \implies \max\{f_1, \dots, f_n\} \in \bar{A} \quad \text{et} \quad \min\{f_1, \dots, f_n\} \in \bar{A}.$$

Étape 4. Si $x, y \in K$ et $x \neq y$, alors :

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (\exists h \in A) \quad h(x) = \alpha \quad \text{et} \quad h(y) = \beta$$

C'est la première étape dans l'approximation : on peut obtenir avec une fonction de A des valeurs données en deux points donnés distincts de K .

Preuve. Comme A sépare les points, il existe $g \in A$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Posons :

$$h = \alpha \mathbb{I} + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g - g(x)\mathbb{I}).$$

On a bien $h(x) = \alpha, h(y) = \beta$, et $h \in A$, car $g \in A, \mathbb{I} \in A$, et A est un sous-espace vectoriel. ■ Étape 5. Pour toute $f \in \mathcal{C}(K)$, pour tout $x \in K$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \bar{A}$ telle que :

$$g(x) = f(x) \quad \text{et} \quad g(y) \leq f(y) + \varepsilon, \forall y \in K.$$

Preuve. Pour tout $z \in K$ tel que $z \neq x$, il existe, par l'Étape 4, en prenant $\alpha = f(x)$ et $\beta = f(z)$, une $h_z \in A$ telle que $h_z(x) = f(x)$ et $h_z(z) = f(z)$.

Notons h_x la fonction constante égale à $f(x)$. Alors :

$$(\forall z \in K) \quad h_z(x) = f(x) \quad \text{et} \quad h_z(z) = f(z).$$

La continuité de f et celle de h_z donnent un voisinage, que l'on peut prendre ouvert, V_z de z tel que :

$$y \in V(z) \implies h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon.$$

Comme K est compact, il existe un nombre fini d'éléments $z_1, \dots, z_m \in K$ tels que :

$$K = V(z_1) \cup \dots \cup V(z_m).$$

Alors $g = \inf \{h_{z_1}, \dots, h_{z_m}\} \in \bar{A}$, par l'Étape 3 bis, et l'on a, pour tout $y \in K$: $g(y) \leq f(y) + \varepsilon$, puisque y appartient à l'un des $V(z_i)$. ■

Étape 6. On a $\bar{A} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$, et soit $\varepsilon \geq 0$.

Pour tout $x \in K$, il existe $g_x \in \bar{A}$ vérifiant les conditions données dans l'Étape 5.

La continuité de f et celle de g_x donnent un voisinage, que l'on peut choisir ouvert, $U(x)$ de x tel que :

$$y \in U(x) \implies g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon.$$

La compacité de K permet de trouver un nombre fini d'éléments $x_1, \dots, x_p \in K$ tels que :

$$K = U(x_1) \cup \dots \cup U(x_p).$$

Alors $\varphi = \max \{g_{x_1}, \dots, g_{x_p}\} \in \bar{A}$, grâce à l'Étape 3 bis ; et elle vérifie :

$$f(y) - \varepsilon \leq \varphi(y) \leq f(y) + \varepsilon, \quad \forall y \in K,$$

car chaque $y \in K$ est dans l'un des $U(x_j)$.

Cela veut dire que $\|f - \varphi\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a bien $f \in \overline{(\bar{A})} = \bar{A}$.

Cela achève la preuve du Théorème 2.5.1. ■

La preuve de Bernstein pour un intervalle compact de $\mathbb{R}$

La forme générale du Théorème de Stone-Weierstrass a été donnée par Stone en 1948. À l'origine, Weierstrass avait montré, en 1885, que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ pouvait y être approchée uniformément par des polynômes. Il utilisait pour cela un produit de convolution (voir le chapitre suivant).

En 1913, Bernstein en a donné une belle preuve probabiliste, que l'on va exposer ci dessous. Notons d'abord que, par un changement de variable, on peut supposer que l'intervalle en question est $[0, 1]$.

L'idée de départ est la suivante : on fixe $t \in [0, 1]$ (aussi bien, si on veut, on peut ne prendre que $0 < t < 1$), et on considère des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre t . Alors $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n, t)$ de paramètres n et t . La loi faible des grands nombres dit que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t = \mathbb{E}(X_1)$ en probabilité. Alors, pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, on a $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(t)$. En effet, si $\varepsilon > 0$ est donné, l'uniforme continuité de f sur $[0, 1]$ permet de trouver $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ pour $|x - x'| \leq \delta$; la convergence en probabilité donne alors un $N \geq 1$ tel que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - t\right| > \delta\right) \leq \varepsilon$ si $n \geq N$. Alors, pour $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] - f(t) \right| &= \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - t\right| > \delta\right\}} \left| f\left[\frac{S_n(\omega)}{n}\right] - f(t) \right| d\mathbb{P}(\omega) \\ &\quad + \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - t\right| \leq \delta\right\}} \left| f\left[\frac{S_n(\omega)}{n}\right] - f(t) \right| d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq 2\|f\|_{\infty}\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$. On pose :

$$[B_n(f)](t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right);$$

c'est un polynôme de degré n . On l'appelle le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Bernstein de f .

On vient de voir que l'on a convergence simple de $B_n(f)$ vers f . Nous allons voir que, grâce à une estimation uniforme de la variance des variables de Bernoulli, la preuve de la loi faible des grands nombres pour ces variables permet d'obtenir la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f .

Rappelons d'abord que si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli

de paramètre t , alors sa variance vaut $\text{Var}(X) = t(1-t)$. On a, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - t\right| > \delta\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| > \delta\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \delta\right) \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2\delta^2} \text{Var}(S_n) \\ &= \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{n\delta^2} = \frac{t(1-t)}{n\delta^2} \leq \frac{1/4}{n\delta^2}. \end{aligned}$$

Considérons le module de continuité de f , défini par :

$$\omega_f(h) = \sup \{|f(t) - f(t')|; |t - t'| \leq h\}.$$

Dire que f est uniformément continue signifie que $\omega_f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Fixons un $\delta > 0$, que l'on précisera après.

On a, pour tout $t \in [0, 1]$ (on prendra garde à différencier l'occurrence $\omega \in \Omega$ du module de continuité ω_f ; on aurait pu modifier ces notations, mais ce sont celles habituellement utilisées !) :

$$\begin{aligned} |f(t) - [B_n(f)](t)| &= \left| \mathbb{E}\left[f(t) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \right| \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left|f(t) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right) = \int_{\Omega} \left|f(t) - f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)\right| d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\left\{t - \frac{S_n(\omega)}{n} \leq \delta\right\}} + \int_{\left\{t - \frac{S_n(\omega)}{n} > \delta\right\}} \\ &\leq \omega_f(\delta) + 2\|f\|_{\infty} \mathbb{P}\left(\left|t - \frac{S_n}{n}\right| > \delta\right) \\ &\leq \omega_f(\delta) + 2\|f\|_{\infty} \frac{1}{4n\delta^2} \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, choisissons maintenant δ de sorte que $\omega_f(\delta) \leq \varepsilon/2$, puis $N \geq 1$ tel que $\|f\|_{\infty} \frac{1}{2N\delta^2} \leq \varepsilon/2$. On aura, pour $n \geq N$, $|f(t) - [B_n(f)](t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$, ce qui prouve que $B_n(f)$ tend uniformément vers f .

2.5.2 Cas complexe

Tel quel, l'énoncé du Théorème 2.5.1 est faux pour les espaces de fonctions à valeurs complexes. Par exemple, si K est le disque unité fermé $\mathbb{D}$ du plan complexe, toute limite uniforme sur K de polynomes p_n , est holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D}$, grâce au Théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme des suites de fonctions holomorphes. L'adhérence de l'algèbre des polynomes n'est donc pas $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ tout entier par exemple, la fonction $z \rightarrow \bar{z}$ n'est pas dedans. En fait, cet exemple est essentiellement le seul cas dont il faut tenir compte ; en effet, on a :

Théorème 2.5.5 (Théorème de Stone-Weierstrass, cas complexe). *Soit K un espace compact et soit A une sous-algèbre, complexe, de l'espace de Banach complexe $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$. Si :*

- a) A sépare les points de K ;
- b) A contient les fonctions constantes ;
- c) A est stable par conjugaison : $f \in A \implies \bar{f} \in A$,

alors A est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$.

Notons qu'ici $\bar{f}$ désigne la fonction $t \in K \mapsto \bar{f}(t) \in \mathbb{C}$, où $\bar{f}(t)$ est le nombre complexe conjugué de $f(t)$. **Preuve.** La condition c) permet de dire que :

$$f \in A \implies \operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2} \in A \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i} \in A.$$

Soit :

$$A_{\mathbb{R}} = \{f \in A; f(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in K\}.$$

La remarque ci-dessus permet de dire que :

$$A = A_{\mathbb{R}} + iA_{\mathbb{R}}.$$

De plus, $A_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$, qui contient les fonctions constantes (réelles), et sépare les points de K : si $u \neq v$, il existe $f \in A$ telle que $f(u) \neq f(v)$; mais alors $\operatorname{Re} f(u) \neq \operatorname{Re} f(v)$ ou $\operatorname{Im} f(u) \neq \operatorname{Im} f(v)$, et $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in A_{\mathbb{R}}$. Il résulte du cas réel que $A_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$. Mais alors, $A = A_{\mathbb{R}} + iA_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K) = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K) + i\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$. ■ **Exemple.** Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$. L'ensemble des polynômes, à coefficients complexes, en les deux variables z et $\bar{z}$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$.

On notera que c'est aussi, en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des polynômes, à coefficients complexes, en les deux variables réelles x et y , en identifiant $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ■

2.5.3 Le système trigonométrique

Nous allons considérer ici des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ **périodiques**, de période 1 sur $\mathbb{R}$.

L'application surjective :

$$\begin{aligned} e_1 : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t} = u \end{aligned}$$

permet de les identifier aux fonctions définies sur $\mathbb{U}$. On peut aussi les identifier aux fonctions définies sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

De plus, on sait que pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ de période 1, il existe une unique fonction continue $\tilde{f} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f = \tilde{f} \circ e_1$ (resp. $\tilde{f} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(x) = \tilde{f}(x + \mathbb{Z})$). L'espace $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de période 1, muni de la norme $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, s'identifie donc à l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ des fonctions continues sur le compact $\mathbb{U}$. Il s'identifie aussi au sous-espace $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f(0) = f(1)\}$. Ces identifications sont isométriques puisque :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \sup_{u \in \mathbb{U}} |\tilde{f}(u)| = \sup_{\xi \in \mathbb{T}} |\tilde{f}(\xi)|.$$

Définition 2.5.1. *On appelle polynôme trigonométrique toute somme finie*

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n e^{2\pi i n t}$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$ et $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}, N_1 \leq N_2$.

Notons qu'en ajoutant au besoin des coefficients nuls, on peut toujours écrire un polynôme trigonométrique sous la forme symétrique :

$$\sum_{n=-N}^N a_n e^{2\pi i n t},$$

où N est un entier positif.

On notera, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$e_n(t) = e^{2\pi i n t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

L'ensemble $e_n; n \in \mathbb{Z}$ s'appelle le **système trigonométrique**.

Les polynômes trigonométriques s'identifient aux polynômes usuels en u et $\bar{u}$ sur $\mathbb{U}$, puisque tout $u \in \mathbb{U}$ s'écrit sous la forme $u = e_1(t) = e^{2\pi i t}$, et qu'alors $u^n e^{2\pi i n t} = e_n(t)$, et que $\bar{u} = e^{-2\pi i t} = e_{-n}(t)$. Le théorème de Stone-Weierstrass complexe appliqué à $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{U})$ donne donc :

Théorème 2.5.6. *L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues de période 1 sur $\mathbb{R}$.*

Considérons maintenant l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables de période 1 telles que :

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty.$$

Lorsque l'on le quotient par le sous-espace des fonctions négligeables, ce quotient s'identifie à $L^2(0, 1) = L^2_{\mathbb{C}}(0, 1)$; en effet, pour toute fonction mesurable $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, la fonction mesurable :

$$\begin{aligned} \tilde{g} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \begin{cases} g(t) & \text{si } 0 \leq t < 1; \\ g(0) & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

se prolonge par périodicité en une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de période 1, et $\int_0^1 |g(t)|^2 dt = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$.

Ces identifications étant faites, on peut énoncer :

Théorème 2.5.7. *Le système trigonométrique est une base orthonormée de $L^2_{\mathbb{C}}(0, 1)$*

Corollaire 2.5.2. *L'espace réel $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$ possède une base orthonormée formée des fonctions :*

$$\begin{aligned} &1, \sqrt{2} \cos(2\pi t), \sqrt{2} \cos(4\pi t), \dots, \sqrt{2} \cos(2\pi n t), \dots \\ &\sqrt{2} \sin(2\pi t), \sqrt{2} \sin(4\pi t), \dots, \sqrt{2} \sin(2\pi n t), \dots \end{aligned}$$

Remarques 1) $\mathbb{Z}$ étant dénombrable, on pourrait ré-indexer le système trigonométrique avec les entiers positifs.

2) Le théorème signifie que, pour toute $f \in L^2_{\mathbb{C}}(0, 1)$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e_n \right\|_2 = 0$$

où les produits scalaires :

$$\hat{f}(n) = (f | e_n) = \int_0^1 f(t) \overline{e_n(t)} dt = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt,$$

pour $n \in \mathbb{Z}$, sont appelés les coefficients de Fourier de f . La formule de Parseval s'écrit alors $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$.

Nous savons qu'il existe alors une suite strictement croissante d'entiers $(l_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-l_n}^{l_n} \hat{f}(k) e^{2\pi i k t} = f(t)$$

pour presque tout $t \in [0, 1]$.

Répondant à une question posée par Lusin en 1913, L. Carleson a montré en 1966 qu'en fait, sans prendre de sous-suite, on a, pour toute $f \in L^2(0, 1)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{2\pi i k t} = f(t)$$

pour presque tout $t \in [0, 1]$. C'est un résultat d'une **extrême** difficulté.

Preuve du théorème 2.5.7 Il est d'abord facile de voir que $\{e_n; n \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormé :

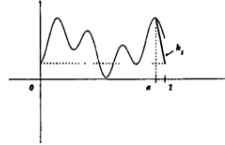
$$(e_n | e_p) = \int_0^1 e^{2\pi i n t} e^{-2\pi i p t} dt = \int_0^1 e^{2\pi i (n-p)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases}$$

Il est total car les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ et $\|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_2$, en utilisant le lemme suivant :

Lemme 2.5.1. *L'ensemble $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de période 1, identifié à $\tilde{\mathcal{C}} = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f(0) = f(1)\}$, est dense dans $L^2(0, 1)$.*

En effet, si $f \in L^2(0, 1)$, il existe alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $g \in \tilde{\mathcal{C}} \cong \mathcal{C}(\mathbb{U})$ telle que $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon/2$; il existe ensuite un polynôme trigonométrique p tel que $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$; mais $\|g - p\|_2 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon/2$; donc $\|f - p\|_2 \leq \varepsilon$.

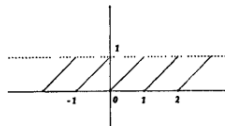
Preuve du lemme. Soit $f \in L^2(0, 1)$ et soit $\varepsilon > 0$. Nous savons (Corollaire II.2.9) qu'il existe $h \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que $\|f - h\|_2 \leq \varepsilon/2$. Soit $M > 0$ tel que $|h(t)| \leq M$ pour tout $t \in [0, 1]$, et notons $a = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^2$. Nous allons modifier h sur $[a, 1]$ en posant $h_1(1) = h(0)$ et en prenant h_1 affine entre a et 1. Alors $h_1 \in \tilde{\mathcal{C}}$, $\|h_1\|_\infty \leq M$, et :



$$\begin{aligned} \|h - h_1\|_2 &= \left(\int_a^1 |h(t) - h_1(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq (1 - a)^{1/2} \sup_{a \leq t \leq 1} (|h(t)| + |h_1(t)|) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M} \times (M + M) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

On a donc $\|f - h_1\|_2 \leq \varepsilon$.

Exemple d'application. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = t$ pour $0 \leq t < 1$, et prolongée par périodicité sur $\mathbb{R}$.



Alors $f \in L^2(0, 1)$ et :

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Les coefficients de Fourier de f sont :

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 t e^{-2\pi i n t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Pour $n = 0$: $\int_0^1 t dt = 1/2$; pour $n \neq 0$:

$$\widehat{f}(n) = \left[\frac{t e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n} dt = \frac{1}{-2\pi i n} = \frac{i}{2\pi n}.$$

La formule de Parseval $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ donne donc :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\pi^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Coefficient de Fourier des fonctions de $L^1(0, 1)$

Pour toute $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 |f(t)| dt \leq \left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

dit que $\mathcal{L}^2([0, 1]) \subseteq \mathcal{L}^1([0, 1])$. On a donc une injection naturelle de $L^2(0, 1)$ dans $L^1(0, 1)$. Par identification de $L^2(0, 1)$ avec son image dans $L^1(0, 1)$, on écrit : $L^2(0, 1) \subseteq L^1(0, 1)$ Pour toute $f \in L^1(0, 1)$, on peut définir les coefficients de Fourier :

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

puisque $|e^{-2\pi i n t}| = 1$. On a $|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus :

Théorème 2.5.8 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Pour toute fonction $f \in L^1(0, 1)$, ses coefficients de Fourier tendent vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini :*

$$\widehat{f}(n) \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$$

Preuve. Si $g \in L^2(0, 1)$, la formule de Parseval :

$$\|g\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)|^2$$

montre que l'on a, en particulier, $\widehat{g}(n) \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$.

Maintenant, si $f \in L^1(0, 1)$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction $g \in L^2(0, 1)$ (par exemple g étagée, ou bien g continue) telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$. Comme on a $|\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| \leq \|f - g\|_1 \leq \varepsilon$, on obtient $|\widehat{f}(n)| \leq |\widehat{g}(n)| + \varepsilon$; donc :

$$\limsup_{|n| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(n)| \leq \limsup_{|n| \rightarrow \infty} |\widehat{g}(n)| + \varepsilon = \varepsilon$$

■

BIBLIOGRAPHIE