Centre Universitaire de Mila
Institut des Mathématiques et Informatique
Deuxième année Mathématiques et Mathématiques Appliquées 2024/2025

Matière : ***Algèbre 3***
Responsable : ***N. Haddad***

Série de TD N° 3 (Applications de diagonalisation)

Exercice 1 Soit la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.
2. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

Exercice 2 Résoudre le système des suites récurrentes suivant

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n), \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n), \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n). \end{cases}$$

avec $u_0 = 0, v_0 = 22$ et $w_0 = 22$.

Exercice 3 Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t), \\ y'(t) = x(t), \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t). \end{cases}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 1)$.

Exercice 4 Soit la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A\alpha$.
2. Déterminer les valeurs de α pour que A_α soit diagonalisable
3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = 2x(t) + y(t), \\ z'(t) = 2x(t) + 2y(t) - z(t). \end{cases}$$