المحور 03: النماذج الخطية للسلاسل الزمنية

المحاضرة 05

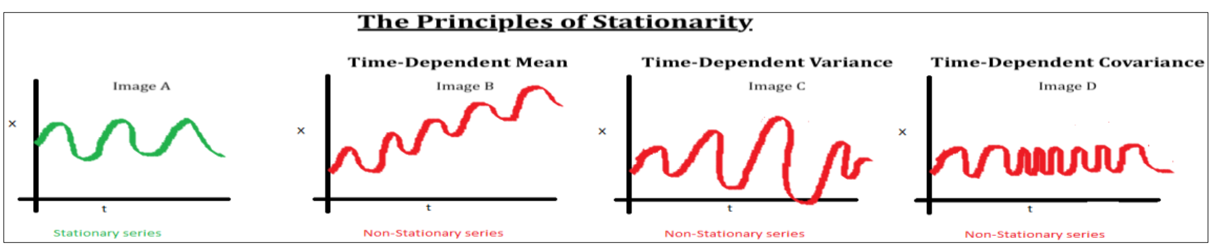
- قبل الخوض في دراسة الاتجاه الأساسي نحو الزيادة أو النقصان لأية سلسلة زمنية، لابد من التأكد أولا من وجود إتجاه في السلسلة الزمنية. وحسب طبيعة نمو السلسلة يمكننا أن نميز بين سلاسل زمنية مستقرة وسلاسل زمنية غير مستقرة أي ذات إتجاه.
- والهدف من دراسة هذا النوع من النماذج (النماذج الخطية) هو تطوير نماذج تشرح تحرك السلسلة الزمنية (Y_t مثلا) ، حيث يمكن شرح هذه السلسلة بواسطة قيمها الحالية والماضية. مثلا $Y_t = \delta + \emptyset_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- قبل الخوض في هذه النماذج نتطرق إلى بعض المصطلحات والمفاهيم الأولية:

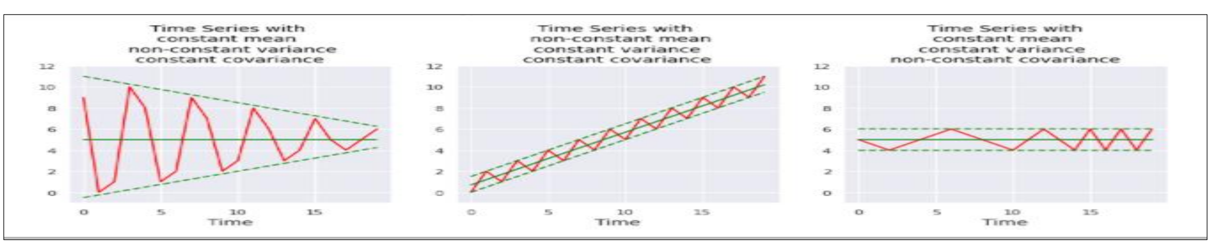
I. مفاهيم أولية:

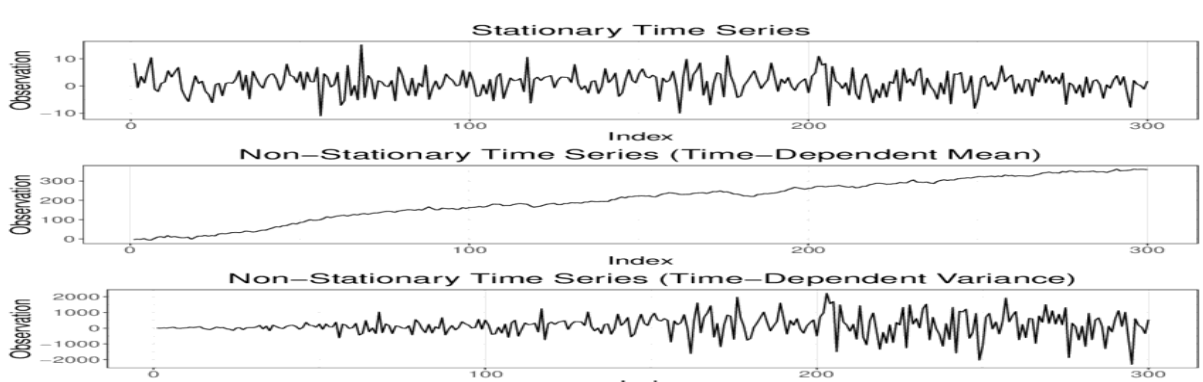
1- مفهوم الاستقرارية (Stationarity):

السلسلة الزمنية المستقرة هي تلك التي تتغير مستوياتها مع الزمن دون أن يتغير المتوسط فيها، وذلك خلال فترة زمنية طويلة نسبيا، أي أن السلسلة لايوجد فيها إتجاه لا نحو الزيادة ولا نحو النقصان.

- فيما يلي بعض الأشكال البيانية تبين حالات الاستقرار وعدم الاستقرار ونوعه:







- عمليا يمكن أن نكتفي بمفهوم الاستقرار من الرتبة 2 (الاستقرارية الضعيفة Weak Stationary) التي تعطى بالصيغة التالية:

نقول عن السلسلة الزمنية Y_t مستقرة إذا حققت الشروط التالية:

1) $\boldsymbol{E(Y_t)} = \mathrm{E}(Y_{t+j}) = \boldsymbol{\mu}$ ثابت
2) $\boldsymbol{V(Y_t)} = \mathrm{V}(Y_{t+j}) = \boldsymbol{\sigma^2} = \boldsymbol{\gamma_0}$
3) $\boldsymbol{Cov(Y_t, Y_{t+j})} = \mathrm{Cov}(Y_{t+s}, Y_{t+j+s}) = \boldsymbol{\gamma_j}$

ويعني الشرط **(1)** تذبذب السلسلة حول وسطها يكون ثابت. والشرط **(2)** يعني ثبات تباين السلسلة عبر الزمن. أما الشرط **(3)** فيعني التباين المشترك أو الارتباط بين قيمتين لنفس المتغير يساوي إلى قيمة ثابتة غير مرتبطة بالزمن.

2- الشوشرة البيضاء (الضجة البيضاء) White Noise:

متسلسلة الشوشرة البيضاء ε_t عبارة عن متسلسلة من المشاهدات العشوائية غير المترابطة، وأحيانا نفرض أنها متسلسلة من المتغيرات العشوائية التي تكون مستقلة ولها توزيعات متماثلة بمتوسط مساو لـ 0 وتباين ثابت، أي:

1) $\boldsymbol{E(\varepsilon_t)} = 0$
2) $\boldsymbol{V(\varepsilon_t)} = \sigma^2$
3) $\boldsymbol{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+j})} = 0$

واختصارا نرمز للشوشرة البيضاء بالرمز $\varepsilon_t \backsim WN(0, \sigma^2)$

3- متسلسلة السير العشوائي (Random Walk):

$$Y_1 = \varepsilon_1$$

$$Y_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow Y_2 = Y_1 + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$Y_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_t$$

$$\vdots$$

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

4- معامل التأخير (Lag operator): إدخال معامل التأخير يبسط التعبير عن مختلف النماذج. ويكتب معامل التأخير بالشكل التالي:

$$Y_{t-1} = LY_t \quad , \quad Y_{t-2} = L^2 Y_t \ , \qquad Y_{t-3} = L^3 Y_t \quad , \quad Y_{t-4} = L^4 Y_t$$

بشكل عام: $Y_{t-k} = L^k Y_t$

5- معامل الفروقات الأولى (First Differences): يرمز لها بالرمز Δ.

$$\Delta = (1 - L)$$

- $\Delta \boldsymbol{Y_t} = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t$
- $\Delta^2 \boldsymbol{Y_t} = (1 - L)^2 Y_t = (1 + L^2 - 2L)Y_t$

يمكن كتابة $\Delta^2 \boldsymbol{Y_t}$ بصيغة أخرى:

- $\Delta^2 \boldsymbol{Y_t} = \Delta(\Delta \boldsymbol{Y_t})$

6- مفكوك Wald (المصفى الخطي):

في هذه الحالة تكون $\boldsymbol{Y_t}$ معبر عنها بدلالة الأخطاء $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ الحالية والسابقة:

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots \dots \dots \dots$$

$$= \varepsilon_t + \theta_1 L \varepsilon_t + \theta_2 L^2 \varepsilon_t + \cdots \dots \dots \dots$$

$$= (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots \dots \dots \dots) \varepsilon_t$$

$$\boldsymbol{Y_t = \theta(L) \varepsilon_t \quad , \quad \theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots \dots \dots}$$

وتسمى $\theta(L)$ بدالة التحويل. $\theta(L)$ محدودا عندما تكون السلسلة الزمنية Y_t مستقرة.

II. نماذج الانحدار الذاتي AR (Autoregressive (AR) Models):

1- الشكل العام:

- نقول عن نموذج أنه يمثل انحدار ذاتي من الرتبة الأولى $AR(1)$ إذا كان من الشكل:

AR(1): $Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$

- ونقول عن نموذج أنه يمثل انحدار ذاتي من الرتبة الثانية $AR(2)$ إذا كان من الشكل:

AR(2): $Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$

- ونقول عن نموذج أنه يمثل انحدار ذاتي من الرتبة الثالثة $AR(3)$ إذا كان من الشكل:

AR(3): $Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \emptyset_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t$

$\vdots$

بشكل عام نموذج من الرتبة p :

AR(p) $Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \emptyset_3 Y_{t-3} + \cdots \dots \dots + \emptyset_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$

يمكن كتابة نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة P باستخدام معامل التأخير L بالشكل التالي:

$$AR(p): \quad Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \emptyset_3 Y_{t-3} + \cdots \dots \dots + \emptyset_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$Y_t - \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \emptyset_3 Y_{t-3} + \cdots \dots \dots + \emptyset_p Y_{t-p} = \varepsilon_t$$

$$Y_t - \emptyset_1 L Y_t + \emptyset_2 L^2 Y_t + \emptyset_3 L^3 Y_t + \cdots \dots \dots + \emptyset_p L^p Y_t = \varepsilon_t$$

$$= \left(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 - \emptyset_3 L^3 - \cdots \dots \dots - \emptyset_p L^p\right) Y_t = \varepsilon_t$$

$$\emptyset(L)\, Y_t = \varepsilon_t$$

$\emptyset(L) = \left(1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 - \emptyset_3 L^3 - \cdots \dots \dots - \emptyset_p L^p\right)$: معامل التأخير الذاتي للنموذج.

2- الشكل المصفي:

رأينا سابقا:

$$\emptyset(L)\, Y_t = \varepsilon_t \dots \dots \dots (1)$$

$$Y_t = \theta(L)\, \varepsilon_t \dots \dots \dots (2)$$

من (1) نكتب:

$$\boldsymbol{Y_t = \emptyset^{-1}(L)\, \varepsilon_t}$$

إذن: $\emptyset^{-1}(\boldsymbol{L}) = \theta(L)$

وبذلك: $\dfrac{\mathbf{1}}{\emptyset(\boldsymbol{L})} = \theta(L)$

وبالتالي: $\emptyset(\boldsymbol{L})\, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{L}) = \mathbf{1}$

$$\left[1 - \emptyset_1 L - \emptyset_2 L^2 - \emptyset_3 L^3 - \cdots \dots \dots - \emptyset_p L^p\right]\left[1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots \dots \dots ... + \theta_p L^p\right] = 1$$

3- شرط الاستقرارية:

يتحقق شرط الاستقرارية في حالة نموذج AR(p) إذا كانت جذور كثير الحدود $\emptyset(\boldsymbol{L})$ تقع خارج الدائرة الوحدوية. كمايلي:

- حالة AR(1):

$$Y_t = \emptyset_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(1 - \emptyset_1 L) Y_t = \varepsilon_t$$

بحيث : $\emptyset(L) = 1 - \emptyset_1 L$

$$\emptyset(L)Y_t = \varepsilon_t$$

$$Y_t = \emptyset^{-1}(L)\,\varepsilon_t$$

لدينا سابقا $\emptyset^{-1}(\boldsymbol{L}) = \theta(L)$

$$\theta(L) = \left[1 + \emptyset_1^1 L + \emptyset_1^2 L^2 + \cdots \dots \dots \dots + \emptyset_1^p L^p\right]$$

$$\begin{cases} \theta_3 = \emptyset_1^3 \quad , \quad \theta_1 = \emptyset_1^1 \\ \theta_4 = \emptyset_1^4 \quad , \quad \theta_2 = \emptyset_1^2 \end{cases}$$

شرط الاستقرارية في نموذج AR(1):

$$\emptyset(L) = 1 - \emptyset_1 L$$

يجب أن تكون : $\emptyset(L) = 0$

وبالتالي: $1 - \emptyset_1 L = 0$

أي: $L = \frac{1}{\emptyset_1}$

يتحقق شرط الاستقرارية إذا كان:

$$|\boldsymbol{L}| > \mathbf{1}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\mathbf{1}}{\emptyset_{\mathbf{1}}}\right| > \mathbf{1}$$

يعني $|\emptyset_{\mathbf{1}}| < \mathbf{1}$

- حالة AR(2):