مركز الجامعي عبد الحفيظ الصوف
معهد العلوم الاقتصادية و التجارية وعلوم التسيير

2023 /2022
رياضيات 2
مسؤول المقياس: أ. حجاج مراد

إسم و لقب الطالب

المحور الثاني

الدوال ذات متغيرين

المحاضرة : 03

أ - تعاريف

ملاحظة:

حفاظا على السير الحسن لحصة الأعمال الموجهة ، و قصد الإستفادة من وقتها الممنوح و زيادة الإستيعاب ، فإنه يتوجب على كل طالب إحترام خصوصية المادة و بصرامة ، و ذالك من خلال الإلتزام بما يلي:

1- إحظار مطبوعة الدرس الخاص بالسلسلة مكتوب عليها إسم و لقب الطالب أو الدرس مكتوب باليد
2- إحظار مطبوعة السلسلة مكتوب عليها إسم و لقب الطالب أو السلسلة مكتوبة باليد
3- تدوين الحلول المكتوبة على الصبورة من طرف الطالب إجباري و يتولى الأستاذ التحقق من ذالك
4- يمنع إستخراج مطبوعة حلول السلسلة إلا بإذن من الأستاذ
5- يمنع إستعمال الهاتف للأغراض السابقة
6- على أستاذ الأعمال الموجهة طرد كل طالب لا يلتزم بإحدى التعليمات السابقة

أ- 1 تعريف

نسمي دالة حقيقية ذات متغيرين $x\ ,y$ كل علاقة تربط كل ثنائية (x,y) من مجموعة جزئية D من $\mathbb{R}^2$ بعدد حقيقي وحيد من $\mathbb{R}$ و نكتب :

$$f:\ D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

مثال:

$f(x,y)=\sqrt{x}Ln(y-1)$ هي دالة ذات متغيرين ، و ذالك أنه من أجل $x \geq 0$ و $y > 1$ فإن $f(x,y)=\sqrt{x}Ln(y-1)$ موجودة (معرفة) و وحيدة في $\mathbb{R}$

$g(x,y)=\frac{Ln\ (x-2)}{\sqrt{-y^2+4y-3}}$ هي دالة ذات متغيرين ، فمن أجل $x > 2$ و $1 < y < 3$ فإن $g(x,y)$ معرفة و وحيدة في $\mathbb{R}$

أ.2_ تعريف

لتكن f دالة ذات متغيرين $x\ ,y$ نسمي منطقة تعريف f و نرمز لها بالرمز D_f (و أحيانا D إن لم يكن هناك إلتباس) مجموعة كل الثنائيات (x,y) من $\mathbb{R}^2$ اللتي تكون من أجلها $f(x,y)$ موجودة و وحيدة في $\mathbb{R}$

مثال :

فالبنسبة إلى الدالتين المسوقتين في المثال السابق f معرفة من أجل $x \in [0\ ,+\infty[$ و $y \in]1\ \ ,+\infty[$

إذن $\subset \mathbb{R}^2$ $(x,y) \in [0,+\infty[\times]1\ ,+\infty[$ و $D_f = [0,+\infty[\times]1\ ,\ +\infty[$

- بالنسبة إلى الدالة g

$$D_g = [2,+\infty[\times]1\ ,3[$$

أرسم على المستوي كل من D_f و D_g (سؤال لا يرد في الإمتحان)

ب ـ الإشتقاق الجزئي من الرتبة الأولى

ب1- تعريف

- لتكن f دالة ذات متغيرين $x\ ,y$ المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى لـ f بالنسبة للمتغير الأول x هي مشتقة الدالة

$$x \longmapsto f(x,y)$$

بإعتبار y ثابت ، و نرمز لها بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x}$ و لدينا

و بالتماثل نعرف المشتقة الجزئية من الرتبة الأولى لـ f بالنسبة للمتغير الثاني y و نرمز لها بـ $\frac{\partial f}{\partial y}$ و لدينا

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة كما يلي

$$f(x,y) = 3x^2 + xy^2 + Lnxy^2$$

لدينا:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x + y^2 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + \frac{2}{y}$$

جـ- الإشتقاق الجزئي من الرتبة الثانية

ج1- تعريف

- لتكن f دالة ذات متغيرين $x\ ,y$ المشتقة الجزئية من الرتبة الثانية لـ f بالنسبة للمتغير الأول x هي مشتقة الدالة

$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

بإعتبار y ثابت ، و نرمز لها بالرمز $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ و لدينا $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$

و بالتماثل نعرف المشتقة الجزئية من الرتبة الثانية لـ f بالنسبة للمتغير الثاني y و نرمز لها بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ و لدينا $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$

و نعرف المشتقات الثانية المختلطة بـ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$

مثال :

أوجد جميع المشتقات من الرتبة الثانية للدالة المعطات في المثال السابق

لدينا:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[6x + y^2 + \frac{1}{x}\right]$$
$$= 6 - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[2xy + \frac{2}{y}\right]$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x - \frac{2}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2xy + \frac{2}{y}\right]$$
$$= 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[6x + y^2 + \frac{1}{x}\right]$$
$$= 2y$$

ملا حظة : عموما $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$