المجموعات (Sets)

تمهيد: إن دراسة المجموعة ذات أهمية كبيرة لفهم موضوع الاحتمالات، وعلى هذا الأساس سيكون هذا الفصل كمدخل للتمهيد لدراسة الاحتمالات. عند دراسة أي مجموعة يجب التأكد من أنها معرفة تماما وذلك يعني أنه اذا اعطينا أي عنصر فإنه سيكون بإمكاننا معرفة فيما إذا كان العنصر منتميا للمجموعة أو غير منتم إليها.

1. تعاريف:

1.1.تعريف المجموعة: هي تجمع أي عدد من العناصر أو الأشياء.

مثال: نرمي قطعة نقد، فما هي العناصر الممكن وقوعها؟

طبعا عند رمي قطعة نقد مرة واحد فالعناصر الممكن وقوعها هي إما صورة (F) أو كتابة (P).

إذن : $\Omega = S = \{F, P\}$

2.1. وصف المجموعة: توجد طريقتين لوصف المجموعات: طريقة العد وطريقة القانون.

أ. **طريقة العد:** وذلك بوضع جميع عناصر المجموعة بين حاصرتين.

مثل:

$$A = \{F, P\}$$
$$B = \{1, 2, c, f, 5, d\}$$
$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ب.طريقة القانون: وذلك بوصف المجموعة بقانون يعرفها يوضع بين حاصرتين:

مثل: $A = \{x : x \in N, x \geq 5\}$ ؛ أي x عدد طبيعي، حيث x أكبر من أو يساوي 5

3.1. أنواع المجموعات:

أ. **المجموعة الخالية (Empty set):** هي المجموعة التي لا يوجد فيها عناصر ونعبر عنها بالرمز $(\phi, \{\ \} \Rightarrow Null \quad Set)$

ب. **المجموعة الجزئية (Subset):** نقول أن المجموعة A مجموعة جزئية من B ونرمز لها $A \subset B$ إذا كان كل عنصر من A منتميا للمجموعة B.

ج. **التساوي (Equality):** نقول أن المجموعة A تساوي B ؛ أي A=B إذا كانتا المجموعتين تحتويان على نفس العناصر، ويكون ذلك بشرط: $A \subset B, B \subset A$.

د. **المجموعة الكلية (Universal Set):** هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات تحت البحث باعتبارها مجموعات جزئية منها.

مخطط فان (Venn Diagram): هو صورة تستعمل في نظرية المجموعات، لتبيين العلاقات الرياضية أو المنطقية لمجموعة من الأشياء أو المفاهيم. يشتمل على عناصر المجموعة الكلية والتي تمثل بواسطة مستطيل ومجموعات جزئية ..... A, B, C والتي تمثل بواسطة دوائر تكون داخل المستطيل.

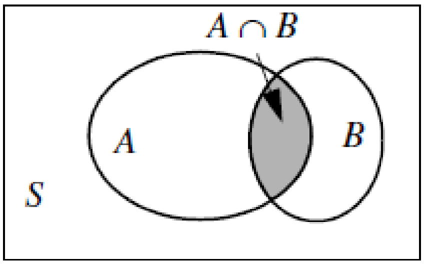
2.العمليات الجبرية على المجموعات

إن دراسة المجموعة ذات أهمية كبيرة لدراسة الاحتمال، والمجموعة هي تجمع أو عدد من العناصر أو الأشياء، عادة ما يتم الرمز لها بالحروف(......,A,B) . من العمليات الجبرية التي سوف نهتم بها:

أ.التقاطع (Intersection): يعتبر تقاطع الحادثان A و B عن وقوع الاثنان في آن واحد ويشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين ويعبر عن ذلك رياضيا بـ $(A\cap B)$ أو (A وB)؛ أي (A et B) . حيث أن:

$$A\cap B=\{x: x\in A, et, x\in B\}$$

ويظهر ذلك في مخطط Venn كما يلي:



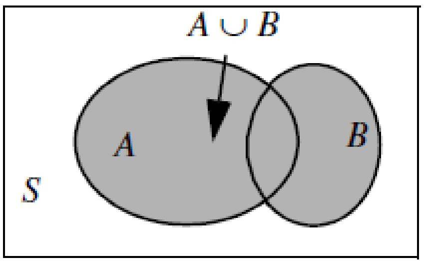
إذن $(A\cap B)$ يبين العناصر التي تظهر في A وتظهر كذلك في B.

حالة خاصة: $A\cap B=\varnothing$ نقول أن A و B حدثان متنافيان.

ب.الاتحاد (Union): يعبر اتحاد الحادثان A و B عن وقوع أحدهما على الأقل، أي؛ وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما. يعبر عن الاتحاد رياضيا بـ $(A\cup B)$ أو (A أوB)؛ أي (A ou B) حيث أن:

$$A\cup B=\{x: x\in A, ou, x\in B\}$$

ويظهر ذلك في مخطط Venn كما يلي:



إذن $(A\cup B)$ يبين العناصر التي تظهر في A والعناصر التي تظهر في B والعناصر التي تظهر في A وB.

مثال: نرمي زهرة نرد مرة واحدة، نعرف الحادث A بأنه ظهور عدد يقبل القسمة على 3. الحادث B بأنه ظهور عدد فردي.

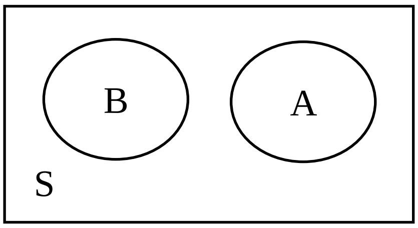
- أوجد فراغ العينة (S)؟
- أوجد $(A\cup B),(A\cap B)$

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A=\{3,6\}$$
$$B=\{1,3,5\}$$

$$A\cup B=\{1;3;5,6\}$$
$$A\cap B=\{3\}$$

ج.الأحداث المتنافية(Disjoint): يقال أن الحادثان A وB متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي وقوع الحدث الآخر؛ بمعنى استحالة وقوعها في آن واحد ومن تم تكون نتيجة تقاطع الحدثان المتنافيان هو المجموعة الخالية. أي $A\cap B=\varnothing$.

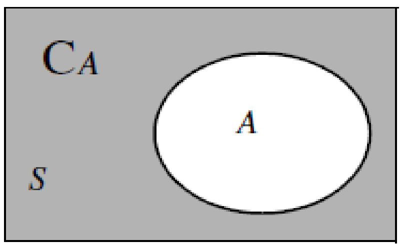
ويظهر ذلك في شكل Venn.



$$A \cap B = \varnothing$$

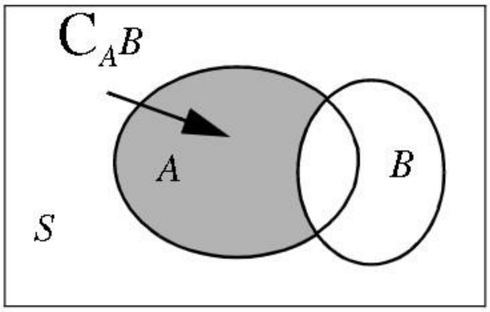
د.الحادث المكمل(Complement) : الحادث المكمل للحادث A هو الذي ينفي وقوعه؛ أي الحادث الذي يشمل كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحادث A. يرمز للحادث المكمل بالرمز $\overline{A}$ أو C_A.

$$C_A=\{x:x\notin A\}$$



$$A\cup\overline{A}=S$$
$$A\cap\overline{A}=\varnothing$$
$$C_{\overline{A}}=A$$
$$\overline{S}=\varnothing$$

هـ. **الفرق (Difference)**: الفرق بين A و B أو مكمل B $(C_A B)$ بالنسبة إلى A هو العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B. أي: $A - B = \left\{ x : x \notin B \quad et \quad x \in A \right\}$



3. **خواص العمليات الجبرية على المجموعات:**

خاصية التبديل	خاصية التبديل للاتحاد	$A \cup B = B \cup A$
	خاصية التبديل للتقاطع	$A \cap B = B \cap A$
خاصية التجميع	خاصية التجميع للاتحاد	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	خاصية التجميع للتقاطع	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
خاصية التوزيع	خاصية التوزيع للتقاطع على الاتحاد	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	خاصية التوزيع للاتحاد على التقاطع	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
قوانين ديمورغان		$(\overline{A \cap B}) = (\overline{A} \cup \overline{B})$
		$(\overline{A \cup B}) = (\overline{A} \cap \overline{B})$

مثال تطبيقي: نرمي زهرة نرد مرة واحدة، لتكن المجموعات الجزئية التالية:

$A=\{1,2\}$	$B=\{2,4,5\}$	$C=\{1,5,6\}$

أوجد ما يلي:

1. $A\cup B, A\cap B, \quad \overline{A}, \quad \overline{B}$
2. أفحص قانون ديمورغان من خلال: $\overline{A\cup B}, \overline{A}\cap\overline{B}$
3. أفحص خاصية التوزيع من خلال: $A\cap(B\cup C),(A\cap B)\cup(A\cap C)$

الحل: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\overline{B}=\{1,3,6\}$	$\overline{A}=\{3,4,5,6\}$	$A\cup B=\{1,2,4,5\}$	$A\cap B=\{2\}$
$\Rightarrow \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$		$\overline{A}\cap\overline{B}=\{3,6\}$	$\overline{A\cup B}=\{3,6\}$
$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,2\}$	$(A\cap C)=\{1\}$	$A\cap(B\cup C)=\{1,2\}$	$(B\cup C)=\{1,2,4,5,6\}$
$\Rightarrow A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$			