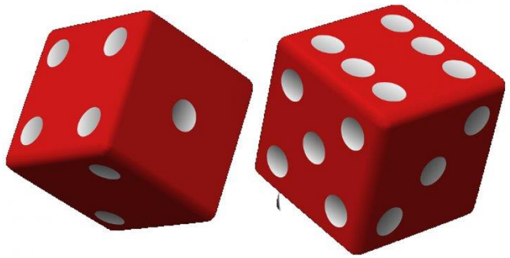
CHAPITRE II: CHAINES DE MARKOV

Centre Universitaire de AbdElhafid Boussouf, Mila
2ème Année Master Intelligence artificielle et ses applications
Année universitaire : 2023/2024
Matière: **Modélisation et simulation**
Responsable de la matière: DR. SADEK BENHAMMADA

1. Rappels: Probabilités – Variables aléatoires – Lois de probabilités

1.1. Définitions: Univers – Evènement - Espace probabilisé

Univers:



- Un ensemble **Ω** de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire
- Les éléments **ω** de l'ensemble **Ω** sont appelés des évènements élémentaires

Exemple:

- Le lancer d'un dé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Le lancer de deux dés : $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$, ensemble des couples formés par les deux chiffres (avec ordre)

Evénement

- On appelle événement (au sens formel) tout sous-ensemble de **Ω**.
- On dira qu'un événement $\mathcal{A}$ est réalisé lorsque l'évènement élémentaire ω effectivement réalisée est un élément de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire lorsque ω ∈ A.

Espace probabilisé

- Un espace probabilisé ou espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:
  - Ω: L'univers (L'ensemble de tous les résultats possibles)
  - $\mathcal{A}$: Un espace d'évènements, qui est un ensemble d' événements
  - Une application de probabilité $\mathbb{P}$:$\Omega \rightarrow [0,1]$, appelée probabilité sur Ω, tel que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Exemple : lancer d'un dé à six faces

- Ω={1,2,3,4,5,6}
- Les évènements A, B, C:

A: Obtenir un six	A={6}
B: Obtenir un nombre pair	B={2,4,6}
C: Obtenir un nombre ≥ 4	C={4,5,6}

1. Rappels: Probabilités – Variables aléatoires – Lois de probabilités

1.1. Définitions: Univers – Evènement - Espace probabilisé

Terminologie des évènements aléatoires

Évènement = sous-ensemble de Ω, élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Langage probabiliste	Notation	Langage ensembliste
issue ou résultat	$\omega\ (\in \Omega)$	élément de Ω
évènement A	$A \subseteq \Omega$	partie de Ω
A est réalisé	$\omega \in A$	appartenance
évènement contraire (non A)	$\overline{A} = \Omega \setminus A$	complémentaire
A et B	$A \cap B$	intersection
A ou B	$A \cup B$	union
évènements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	disjoints
A implique B	$A \subseteq B$	inclusion
évènement impossible	$\emptyset$	ensemble vide
évènement certain	Ω	partie maximale
système complet $A_1, \ldots, A_n$	$\Omega = \sqcup A_i$	partition

1.2. Variable aléatoire

1.2.1. Notion d'un VA

- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
- Une variable aléatoire réelle X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans ℝ:

$$\mathbf{X}: \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Il existe deux principaux types de variables aléatoires utilisées en pratique : les variables aléatoires **discrètes** et les variables aléatoires **continues**.
  - Une variable aléatoire X est dite **discrète** si elle ne prend que des **valeurs de type entier** dans une liste finie $x_1, x_2, \dots, x_n$ ou une liste infinie $x_1, x_2, \dots$
  - Une variable aléatoire X **continue** peut prendre n'importe quelle valeur réelle dans un intervalle.

Exemple

- Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat.

$\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

- On considère le jeu suivant :
  - Si le résultat est pair, on gagne 20 DA
  - Si le résultat est 1, on gagne 30 DA
  - Si le résultat est 3 ou 5, on perd 40 DA
- On a défini ainsi **une variable aléatoire X** sur Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6} qui peut prendre les valeurs 20, 30 ou -40:

$X(1) = 30$

$X(2) = 20$

$X(3) = -40$

$X(4) = 20$

$X(5) = -40$

$X(6) = 20$

$\omega \epsilon \Omega$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$X(\omega)$	30	20	-40	20	-40	20

- Soit une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ définie sur un univers $\boldsymbol{\Omega}$ et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- La loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$ associe à toute valeur x_i de $\boldsymbol{X}$ la probabilité $P(X = x_i)$.

Exemple

- Le lancer d'un dé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$: $\forall \omega \epsilon \Omega, P(\omega) = \frac{1}{6}$
- On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

$$P(X = 20) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 30) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = -40) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

- Tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X:

x_i	-40	20	30
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

- Soit une variable aléatoire ***X*** définie sur un univers **Ω** et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- La loi de probabilité de ***X*** associe à toute valeur x_i de ***X*** la probabilité $P(X = x_i) = p_i$.
- L'espérance mathématique de la loi de probabilité de ***X*** est :

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n$$

- La variance de la loi de probabilité de X est :

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(x)\right)^2 = p_1\left(x_1 - E(x)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(x)\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - E(x)\right)^2$$

- L'écart-type de la loi de probabilité de ***X*** est :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Exemple

x_i	-40	20	30
$P(X = x_i)$	$\frac{\mathbf{1}}{3}$	$\frac{\mathbf{1}}{2}$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{\mathbf{1}}{3} \times (-40) + \frac{\mathbf{1}}{2} \times (20) + \frac{\mathbf{1}}{6} \times (30) = \frac{\mathbf{10}}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \big(x_i - E(x)\big)^2 = \frac{\mathbf{1}}{3} \times \left(-40 - \frac{\mathbf{10}}{6}\right)^2 + \frac{\mathbf{1}}{2} \times \left(20 - \frac{\mathbf{10}}{6}\right)^2 + \frac{\mathbf{1}}{6} \times \left(30 - \frac{\mathbf{10}}{6}\right)^2 \approx 880{,}55$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{880{,}55} = 29{,}7$$

Fonction de répartition (Cumulative distribution function : CDF)

- Soit une variable aléatoire $X: \Omega \to \mathbb{R}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{F_X(x) = P(]-\infty, x]) = P(X \leq x)}$$

- La fonction de répartition d'une v.a. X satisfait les propriétés suivantes :
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$.
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  - F_X est une fonction croissante: Pour toute paire de valeurs $x_1 < x_2, on\ a\ F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

1. Rappels: Probabilités – Variables aléatoires – Lois de probabilités

1.2. Variable aléatoire

1.2.5. Fonction de masse - Fonction de densité

Fonction de masse et (Probability mass function : PMF)

La fonction de masse de probabilité (PMF) d'une **<u>variable aléatoire discrète</u>** X est la fonction $f_X\colon \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ définit par:

$$f_X(x) = P(X = x).$$

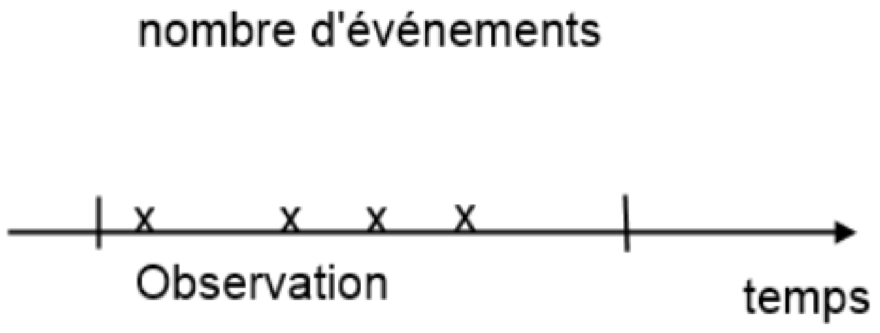
Fonction de densité de probabilité (Probability density functions : PDF)

Pour un **<u>variable aléatoire . continu</u>** X avec une fonction de répartition F, la fonction de densité de probabilité (PDF) de X est la dérivée f de F, donnée par:

$$f(x) = F'(x).$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X est donc :$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- La loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui permet la modélisation de l'observation d'un phénomène qui décrit le comportement du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixé.
- Considérons X la variable aléatoire qui donne le nombre d'événements observés dans une unité de temps.
- On suppose
  - Un seul événement arrive à la fois
  - Le nombre d'événements se produisant ne dépend que du temps de l'observation
  - Les événements sont indépendants



1. Rappels: Probabilités – Variables aléatoires – Lois de probabilités

1.2. Variable aléatoire

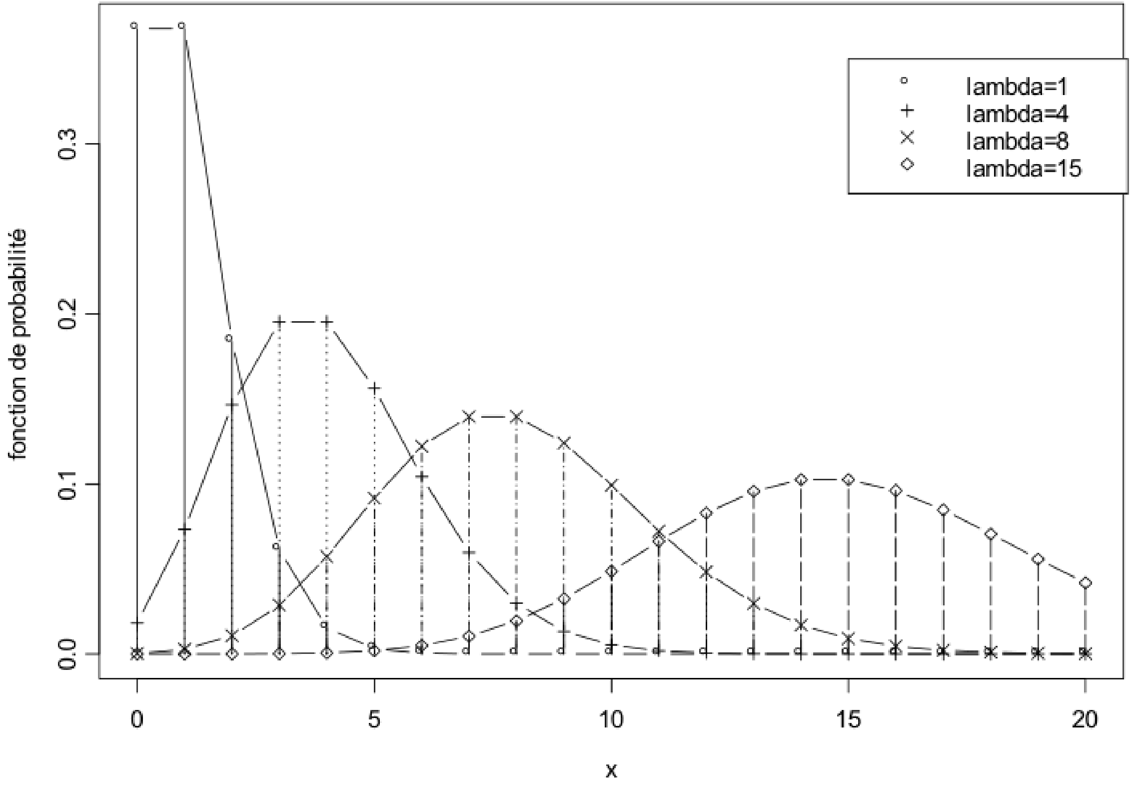
1.2.6. Loi de Poisson

- La variable aléatoire X qui donne le nombre d'événements par unité de temps suit une loi de Poisson, notée $X \sim P(\lambda)$, où $\boldsymbol{\lambda}$ est le nombre moyen d'événements par unité de temps.
- Les valeurs possibles de la variable aléatoire sont:
  - $S_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - La loi de probabilité est donnée par:

$$\boldsymbol{f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}} \quad \text{pour } x = 0{,}1, \ldots$$

- Espérance: $E(X) = \lambda$
- Variance: $Var(X) = \lambda$
- Ecart type: $E(X) = \sqrt{\lambda}$

Fonction de masse de loi de Poisson



Exemple

- Dans une banque les clients arrivent à une fréquence moyenne **de 10 par heure**. Quelle est la probabilité qu'il y ait plus de **2 clients** en **10 min** ?
- Solution : Si on suppose que les clients arrivent indépendamment les uns des autres et que la moyenne est constante, la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ qui donne le nombre de clients en **10** min suit une loi $\boldsymbol{P(\lambda)}$, où $\boldsymbol{\lambda}$ est le nombre moyen de clients qui arrivent en **10 min**. $\boldsymbol{X \sim P\,(\lambda)}$

$$\boldsymbol{\lambda = 10 * \frac{10}{60} = \frac{10}{6}}$$

$$\boldsymbol{P\,(X > 2) = 1 - P\,(X \leq 2) = 1 - \left(P\,(X = 0) + P\,(X = 1) + P\,(X = 2)\right)}$$

$$\boldsymbol{= 1 - \left(f\,(0) + f\,(1) + f\,(2)\right)}$$

$$\boldsymbol{= 1 - \left(\frac{e^{-10/6}(10/6)^0}{0!} + \frac{e^{-10/6}(10/6)^1}{1!} + \frac{e^{-10/6}(10/6)^2}{2!}\right)}$$

1. Rappels: Probabilités – Variables aléatoires – Lois de probabilités

1.2. Variable aléatoire

1.2.7. Loi exponentielle

- La loi exponentielle donne le temps d'attente avant un événement lorsque le processus est régi par une loi de Poisson.
- Dans le cas de la loi de Poisson la variable aléatoire est le nombre d'événements tandis que dans la loi exponentielle c'est le temps d'attente avant le premier événement.
- Il est à noter que le nombre d'événements est une **variable aléatoire discrète** tandis que le temps d'attente est une **variable aléatoire continue**.
- La variable aléatoire **X** qui donne le temps d'attente avant la première apparition d'un phénomène de Poisson est **une loi exponentielle de paramètre** $\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{E(X)}}$
- $\boldsymbol{E(X)}$ est l'espérance de **X** (temps moyen). Sa fonction de densité est donnée par:

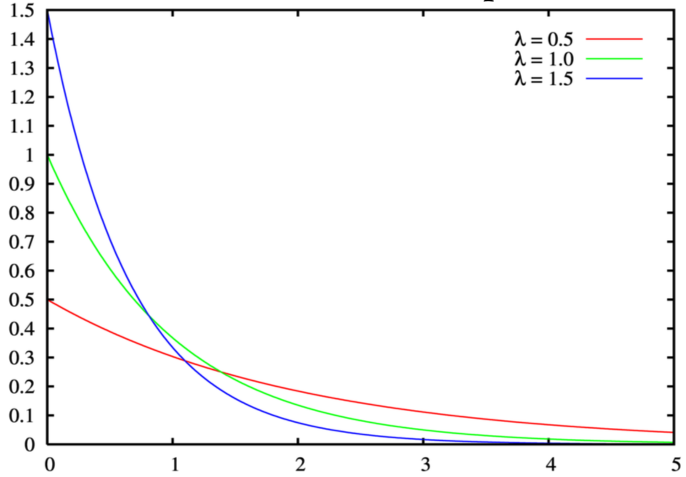
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ pour } 0 \le x \le \infty$$

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$P(X \le a) = P(0 \le X \le a) = e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$P(X \ge a) = 1 - P(X \le x) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}$$

Fonction de densité de loi exponentielle



1.2.7. Loi exponentielle

Notation	$\mathbf{X \sim Exp(\lambda)}$
Paramètres	$\lambda > 0$
Support	$x \in [0, \infty[$
Fonction de densité (PDF)	$(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda e^{-\lambda x}}$
Fonction de répartition (CDF)	$F(x) = P(X \leq x) = \mathbf{1} - \boldsymbol{e^{-\lambda x}}$
Esperance	$E(X) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$
Variance	$\mathrm{Var}(X) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda^2}}$

Exemple 1: Dans une banque les clients arrivent à une fréquence moyenne **de 10 par heure**. Quelle est la probabilité qu'un client arrive dans 5 **minutes** ?

Solution:

Soit X la variable aléatoire qui donne la durée avant l'arrivée d'un client

X suit une loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{60}} = \mathbf{1/6}$

$$\boldsymbol{P(X \leq 5) = 1 - e^{-5\times\frac{1}{6}} \approx 0,56}$$

Exemple 2: Une montre digitale a une durée de vie moyenne de 100000 heures. Quelle est la probabilité qu'elle ne fonctionne plus après 5 ans ?

Solution :

Soit X la variable aléatoire qui donne la durée de vie en années d'une montre digitale.

- E(X)=100000/365,25/24= 11. 408 ans
- X suit une loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{11.408}$
- $\boldsymbol{P(X \leq 5) = 1 - e^{-5\times\frac{1}{11.408}} \approx 0,355}$

2. Processus aléatoires

- La théorie des processus aléatoires concerne l'étude mathématique de phénomènes physiques, biologiques ou économiques évoluant dans le temps, et dont l'évolution est de caractère aléatoire, c'est-`a-dire non prévisible avec certitude.
- Un processus aléatoire (stochastic process) est une collection de variables aléatoire $(\boldsymbol{X_t})_{\boldsymbol{t \in T}}$
- Pour définir un processus aléatoire, il faut :
  1. Un espace des temps $\boldsymbol{T}$ $(\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}_+)$
  2. Un espace des états $\boldsymbol{E}$.
  3. Une famille de v7ariables aléatoires $(\boldsymbol{X_t})_{\boldsymbol{t \in T}}$.

2. Processus aléatoires

1. Un espace des temps $\boldsymbol{T}$ ($\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}_+$)

- Les deux espaces des temps les plus utilisés sont :
  - $\boldsymbol{T} = \mathbb{N}$: Le processus est dit discret ; on observe ce qu'il se passe à chaque unité de temps, ou bien on fait une suite d'opérations et on regarde ce qu'il se passe à chaque opération (ex : lancer une pièce).
  - $\boldsymbol{T} = \mathbb{R}_+$: le processus est dit continu : on observe un système qui évolue dans le temps à partir d'un instant t_0 que l'on prend pour origine des temps.

2. Un espace des états $\boldsymbol{E}$

- L'ensemble $\boldsymbol{E}$ peut être :
  - discret : c'est-à-dire fini ou dénombrable. Il sera, dans ce cas, souvent pratique d'identifier E avec une partie de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{Z}$.
  - non discret : par exemple $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}$ ou $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^2$ (partie du plan) ou $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^3$(partie de l'espace)

3. Une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$

- Ces variables aléatoires sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans l'espace des états E.
- Ainsi, à chaque instant $t \in T$, on associe, non pas une valeur déterministe mais une valeur aléatoire décrite par une variable aléatoire X_t à valeurs dans E.
- La variable aléatoire X_t peut représenter des observations successives sur une caractéristique d'une population, la météo, etc.

3. Chaînes de Markov à temps discret

3.1. Définition d'une chaîne de Markov à temps discret

- Soit $(X_t)_{t\in T}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans E un ensemble fini. Cette famille est une chaîne de Markov si elle vérifie la propriété de Markov : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1} \in E$:

$$\boxed{P(X_{n+1} = a_{n+1} | X_n = a_n, X_{n-1} = a_{n-1} .., X_1 = a_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)}$$

- La valeur de la variable X_{n+1} ne dépend que de la valeur de la variable X_n, et pas de tous ses états antécédents.
- Cela signifie que l'état actuel (au temps $n-1$) est suffisant pour déterminer la probabilité du prochain état (au temps n).
- Les chaînes de Markov sont des processus temporels « **sans mémoire** ».

Chaîne de Markov homogène

- Une chaîne de Markov est dite homogène si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout i et j dans E, elle vérifie la propriété suivante :

$$\boxed{P(X_{n+1} = i | X_n = j) = P(X_1 = i | X_0 = j)}$$

Autrement dit une chaîne est homogène si la probabilité de transition d'un état à l'autre ne dépend pas de l'indice de la variable concernée mais uniquement de sa valeur : l'évolution du processus ne dépend pas de l'origine des temps.

3. Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)

3.1. Définition d'une chaîne de Markov à temps discret

- Les chaînes de Markov sont des processus aléatoires permettant de modéliser l'évolution d'un système dont l'état au temps ***t+1*** ne dépend que de son état au temps ***t***, et possédant un nombre fini d'états.
- À chaque étape, le système évolue en changeant d'état.
- Les probabilités de passer à chaque état au temps ***t+1*** à partir d'un état donné au temps ***t*** peuvent être regroupées sous forme d'une ***matrice carrée*** (**matrice de transition**)
- **La matrice de transition** dont les propriétés algébriques nous renseignent sur l'évolution du système.

3.2. Matrice de transition

- **Probabilité de transition**
  - On appelle probabilité de transition pour aller de l'état i à l'état j la probabilité d'un état au suivant ainsi :

$$\boxed{P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P_{i,j}}$$

- **Matrice de transition**
  - On définit une matrice carrée à coefficients réels à partir des probabilités de transition:

$$\mathcal{P} = \left(P_{x,y}\right)_{i,j \in E}$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{x_0,x_0} & p_{x_0,x_1} & p_{x_0,x_2} & \cdots \\ p_{x_1,x_0} & p_{x_1,x_1} & p_{x_1,x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Toute matrice de transition vérifie les propriétés suivantes :

(1) pour tout couple $\forall\, j, i \in E$, $0 \le P_{i,j} \le 1$;

(2) La matrice $\mathcal{P}$ est stochastique ligne, c'est-à-dire : $\forall\, i \in E\ \sum_{j \in E} P_{i,j} = 1$

3.3. Graphe d'une chaîne de Markov

Représentation de la matrice de transition en tant que graphe

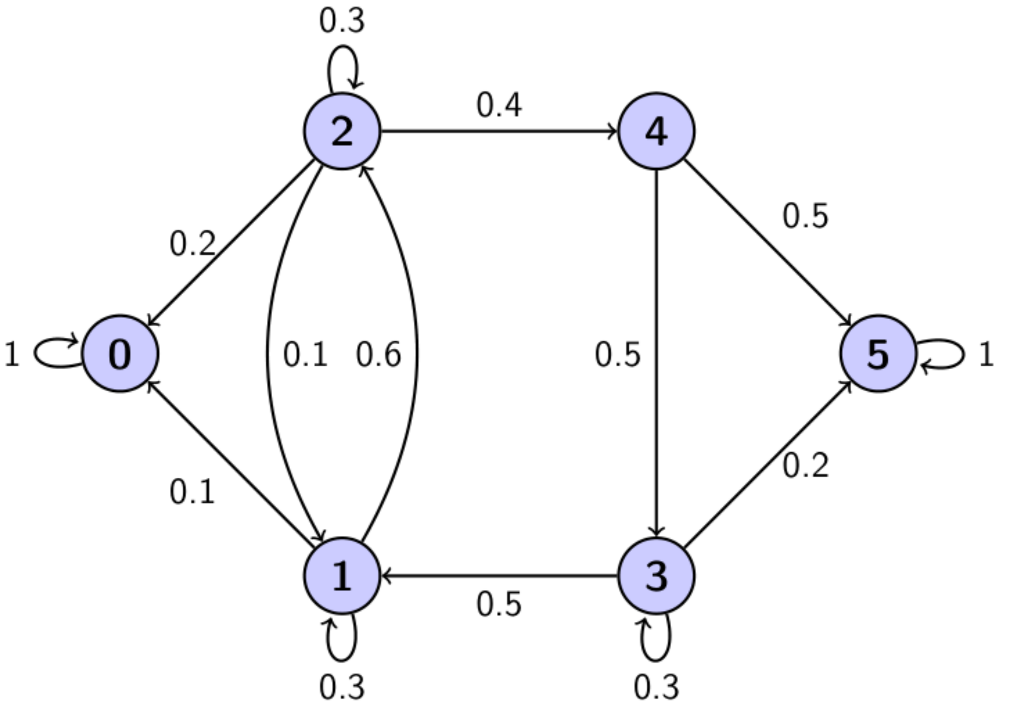
- Un chaine de Markov d'espace d'état E et de matrice de transition P peut être représenté par un graphe orienté étiqueté: $\mathrm{G} = (E, A)$, où les arêtes sont données par des transitions avec une probabilité non nulle:

$$\mathrm{A} = \left\{(i,j) \middle| P_{i,j} > 0\right\}$$

- L'arête (i,j) est étiquetée par la probabilité $P_{i,j}$

Ex

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



Probabilité de transition d'un état $\boldsymbol{i}$ à un état $\boldsymbol{j}$ en $\boldsymbol{n}$ étapes

Soit $(X_n)n \geq 0$ une chaîne de Markov de matrice de transition P

- On note $\boldsymbol{p_{i,j}^n = P(X_n = j | X_0 = i)}$ la probabilité de passer d'un état $\boldsymbol{i}$ à un état $\boldsymbol{j}$ en $\boldsymbol{n}$ étapes, pour $n \in N$.
- On note $P^{(n)}$ la matrice des coefficients $p_{i,j}^n$: $\boldsymbol{P^{(n)} = \left(p_{i,j}^n\right)_{i,j \in E}}$

Équations de Chapman-Kolmogorov

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{P^{(n)} = P^n = \left(p_{i,j}^n\right)_{i,j \in E}}$$

- Autrement dit, la probabilité de passer d'un état **i** à un état **j** en **n** étapes, $\boldsymbol{p_{\mathbf{i},j}^n}$, est le coefficient situé à la $\boldsymbol{i}^{\text{ème}}$ ligne et la $\boldsymbol{j}^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\boldsymbol{P^n}$.
- En général: Les matrices de transitions d'ordre $n + m$ et n, m satisfont à la relation suivante:

$$\boldsymbol{P^{(n+m)} = P^{(n)}\ P^{(m)}}$$

- Exemple:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad P^{20} = \begin{pmatrix} 0.00172635 & 0.00268246 & 0.992286 & 0.00330525 \\ 0.00139476 & 0.00216748 & 0.993767 & 0.00267057 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.00132339 & 0.00205646 & 0.994086 & 0.00253401 \end{pmatrix}$$

Distribution stationnaire

- Soit (X_n) une chaine de Markov à espace d'états E de matrice de transition P.
- La distribution après $\boldsymbol{n}$ transitions notée $\boldsymbol{\pi_n} = (\boldsymbol{p_0},\ \boldsymbol{p_1}, \dots,\ \boldsymbol{p_m})$, est la loi de probabilité de la variable aléatoire $\boldsymbol{X_n}$
- On l'a note avec une matrice ligne $\boldsymbol{\pi_n} = (\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_1}, \dots, , \boldsymbol{p_m})$, le nombre de colonne correspond aux nombres d'états dans E.

Propriétés:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \pi_{n+1} = \pi_n P$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \pi_n = \pi_0 P^n$$

3.4. Transitions d'ordre *n* et loi à l'instant *n*

Distribution stationnaire

- Soit (X_n) une chaine de Markov à espace d'états E de matrice de transition P.
- La distribution après $\boldsymbol{n}$ transitions notée $\boldsymbol{\pi_n = (p_0,\ p_1, \dots, ,\ p_m)}$, est la loi de probabilité de la variable aléatoire $\boldsymbol{X_n}$
- On l'a note avec une matrice ligne $\boldsymbol{\pi_n = (p_0, p_1, \dots, , p_m)}$, le nombre de colonne correspond aux nombres d'états dans E.

Propriétés:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \pi_{n+1} = \pi_n P$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \pi_n = \pi_0 P^n$$

Définition - Distribution stationnaire

Une distribution $\boldsymbol{\pi}$ est dite distribution stationnaire d'une chaîne de Markov de matrice de transition P, si c'est une probabilité qui vérifie:

$$\boldsymbol{\pi = \pi \times P}$$

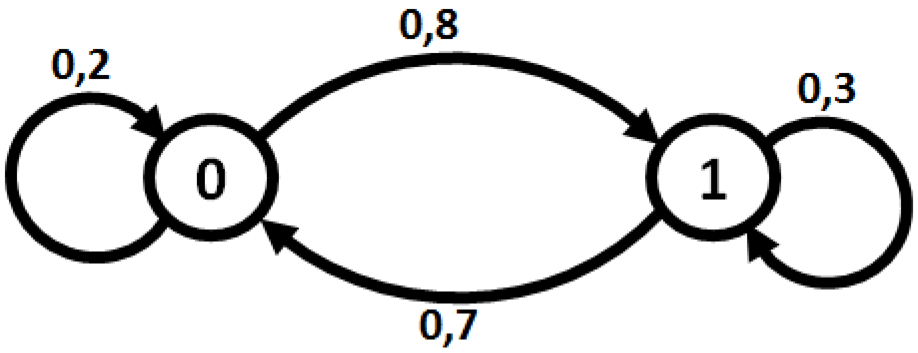
Théorème (Perron-Frobenius)
P est la matrice de transition d'une chaine de Markov, on note π_0 la distribution initiale. S'il existe un entier $k \geq 1$, tel que la matrice P^k est une matrice strictement positive : tous ses éléments sont positifs non nuls (Donc P est une ***matrice primitive***), alors, la suite (π_n) des distributions converge vers une **unique distribution $\boldsymbol{\pi}$, invariante (stationnaire)** et indépendante de la distribution initiale π_0.

3.4. Transitions d’ordre *n* et loi à l’instant *n*

Exemple

Matrice de transitons

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ \color{red}{0{,}7} & \color{red}{0{,}3} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} \end{array}$$



- Initialement on est en 0, quelle est la probabilité d’ètre en 0 à la 3ème étape?
-
- $\pi_3 = \pi_0 P^3$
- $\pi_3 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}^3 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}525 & 0{,}475 \end{pmatrix} = (0{,}4 \quad 0{,}6)$

  - La probabilité d’étre en 0 à la 3ème étape est =0,4
  - La probabilité d’étre en 1 à la 3ème étape est =0,6

- Soit x et y deux états. On dit que ou $\boldsymbol{y}$ est **accessible** à partir de $\boldsymbol{x}$ (ou $\boldsymbol{x}$ **mène à** $\boldsymbol{y}$): $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}$, si et seulement si:

$$\exists\, n \geq 0, p_{x,y}^{n} = P(X_n = y | X_0 = x) > 0$$

- Cette relation signifie que partant de x nous avons une probabilité non nulle d'atteindre y à un certain temps n.
- On dit que $\boldsymbol{x}$ **et** $\boldsymbol{y}$ **communiquent** $(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y})$ si mène à $y(\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y})$ et y mène à x $(\boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{x})$.
- Sur le graphe de transition d'une chaine de Markov deux états $\boldsymbol{x}$ **et** $\boldsymbol{y}$ **communiquent** $(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y})$, si et seulement s'il existe des chemins dirigés de x à y et de y à x.

- Les états E de la chaîne peuvent être partitionnés en **classes d'équivalence** appelées classes irréductibles $\boldsymbol{C}$, tel que: $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}, \boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}$

Classe fermée

- Une classe d'équivalence $\boldsymbol{C}$ est dite fermée si pour tout $x, y \in E$:

$$x \in C \text{ et } x \rightarrow y \Rightarrow y \in C$$

- Autrement dit, une classe fermée C est une classe dont on ne peut pas en sortir.
- Sur le graphe d'un chaine de Markov, une classe est fermée si aucune transition n'en sort.

Etat absorbant

- Une classe fermée réduite à un état $C = \{x\}$ est appelée un état absorbant.
- Un état x est absorbant ssi $p_{x,x} = 1$.

Définition - Chaîne de Markov irréductible

Une chaîne de Markov est dite **irréductible** si:

$$\forall\, x, y \in E, \boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}$$

- **Autrement dit,** si E est réduit à une seule classe, la chaîne de Markov est irréductible.
- **Autrement dit,** une chaîne de Markov est dite irréductible si:

$$\forall\, x, y \in E, \exists\, n \in \mathbb{N}, p_{x,y}^{n} = P(X_n = y | X_0 = x) > 0$$

- Sur le graphe de transition, une chaine de Markov est dite irréductible si **son graphe est fortement connexe**, c'est-à-dire que pour tout couple d'états (x, y), il existe des chemins dirigés de x à y et de y à x

Définition - Chaîne de Markov réductible

Une chaîne de Markov est dite **réductible** si et seulement si les états de E appartiennent à deux classes d'équivalence ou plus,

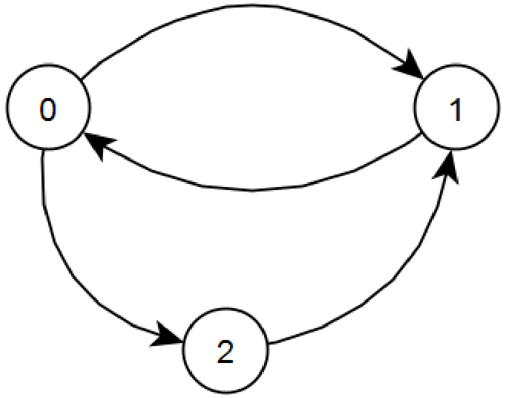
3. Chaînes de Markov à temps discret

3.5. Chaîne de Markov irréductible

3.5.3. Chaines de Markov irréductible et réductible

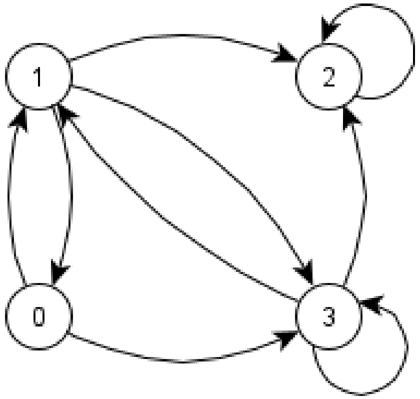
Exemples

Chaîne de Markov irréductible:

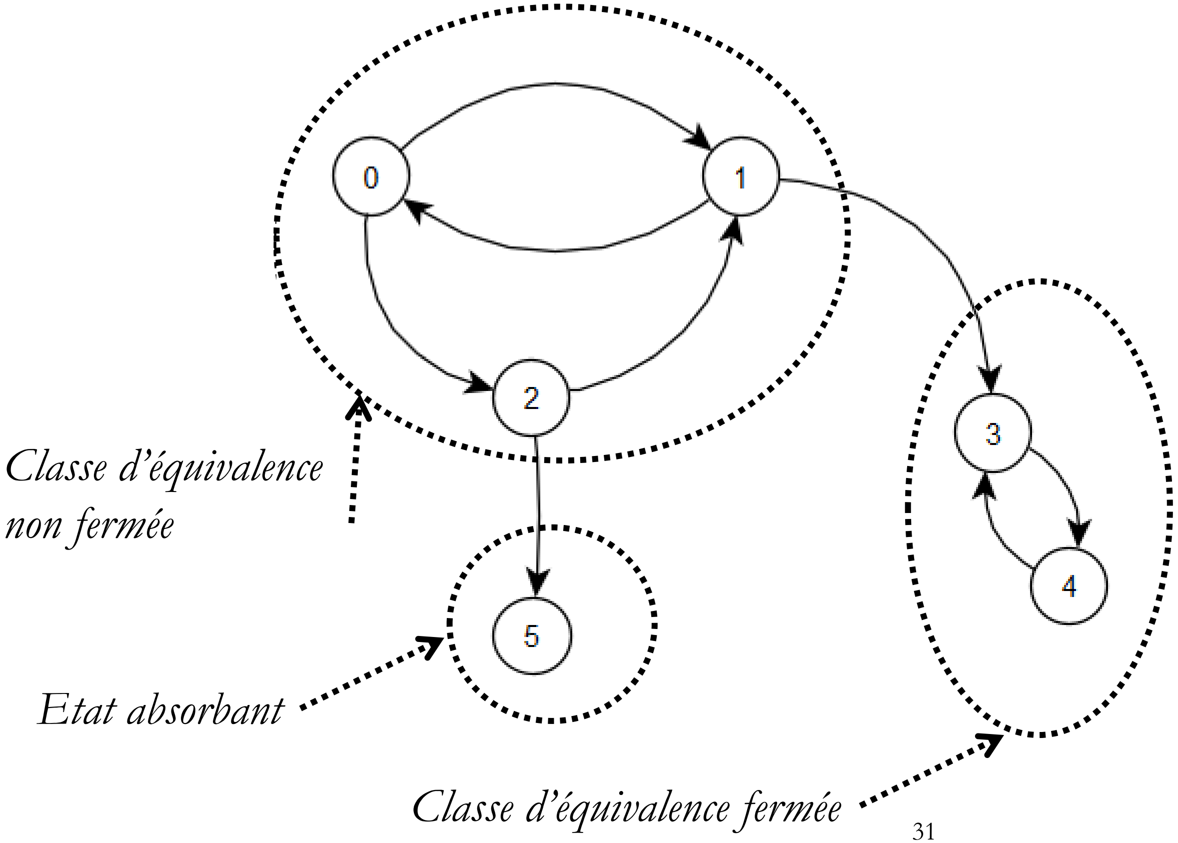


$0 \leftrightarrow 1$
$1 \leftrightarrow 0$
$0 \leftrightarrow 2$
$2 \leftrightarrow 0$
$1 \leftrightarrow 2$
$2 \leftrightarrow 1$

Chaîne de Markov réductible, car aucun état ne peut être atteint à partir de 2.



Chaîne de Markov réductible



Définition.

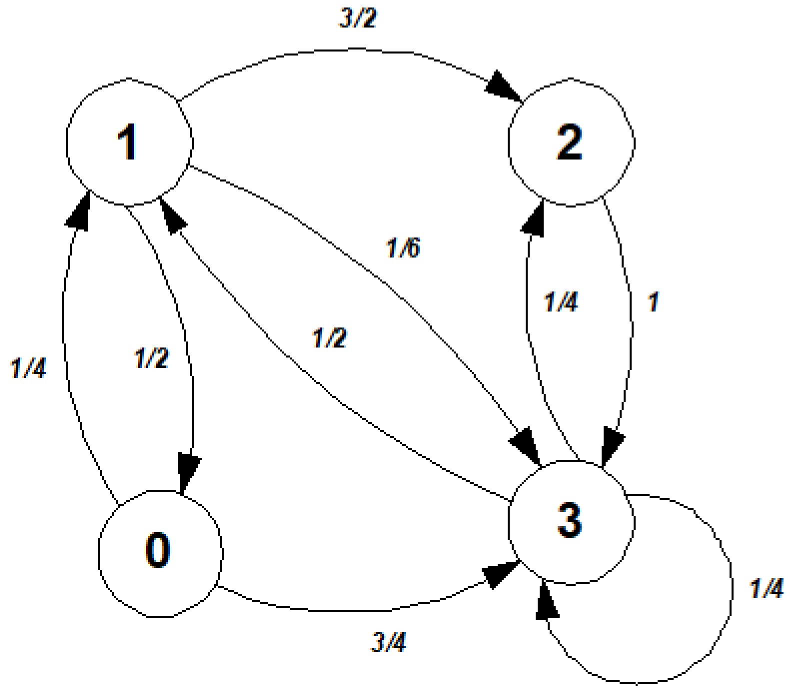
- Étant donné un état $x \in E$, ***la période*** de l'état x, notée $d(x)$, est le plus grand commun diviseur des entiers n tels que $p_{x,x}^{n}$ est strictement positif :

$$d(x) = PGCD\{n \geq 1 \mid p_{x,x}^{n} > 0\}$$

- Si $d(x) = 1$, alors on appelle l'état x **apériodique**.
- Une **chaîne de Markov est apériodique** si et seulement si tous ses états sont apériodiques.

Exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{d(0) = 1, d(1) = 1, d(2) = 1, d(3) \ = 1}$$

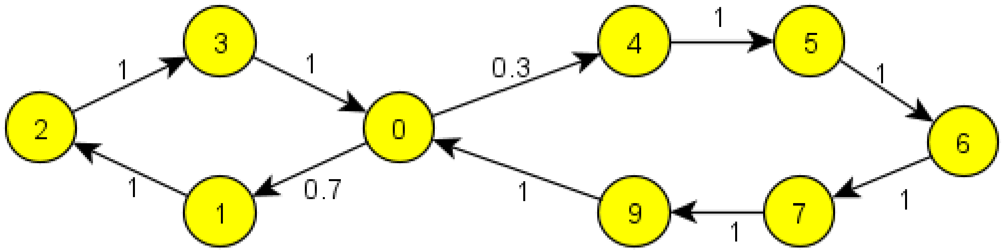
La chaine est donc apériodique

Théorème. Si deux états communiquent alors ils ont la même période: $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}$ alors $\mathbf{d}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{d}(\boldsymbol{y})$

- **Propriétés.**
  - Tous les états d'une même classe irréductible ont la même période.
  - Une classe est dite apériodique si est seulement si sa période égale 1.
  - **Tous les états d'une chaine de Markov irréductible ont la même période.**

3.6. Période

3.6.2. *Période d'une chaine irréductible*



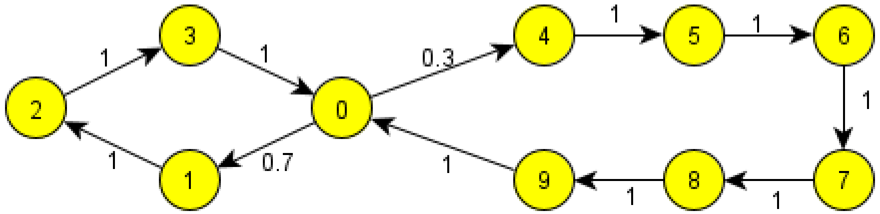
Exemple: **Chaine irréductible périodique**

- **La chaîne est irréductible (une seule classe), par conséquent: tous les états ont la même période qui est la période de la chaîne de Markov**
- Nous constatons qu'il y a deux cycles donc les états de chacun des deux cycles communiquent.
- De plus, ces deux cycles contiennent le même état 0, ce qui implique qu'ils communiquent, donc, **la chaîne est irréductible (une seule classe), par conséquent: tous les états ont la même période qui est la période de la chaîne de Markov**
- Partant de 0, nous sommes de nouveau en 0 au bout de 4 transitions en passant par le petit cycle et au bout de 6 transitions en passant par le grand cycle.

$$p_{0,0}^{4} = 0.7 \text{ et } p_{0,0}^{6} = 0.3$$

- $\mathbf{d(0)} = \boldsymbol{PGCD\{n \geq 1 \mid p_{0,0}^{n} > 0\} = PGCD\{4 \times i + 6 \times j \mid (i,j) \neq (0,0)\} = PGCD\{4,6\} = 2.}$
- La chaîne est périodique de période 2.

Exemple: Chaine irréductible apériodique



- **La chaîne est irréductible (une seule classe), par conséquent: tous les états ont la même période qui est la période de la chaîne de Markov**
- $\mathbf{d(0)} = \boldsymbol{PGCD\{n \geq 1 \mid p_{0,0}^{n} > 0\}} = \boldsymbol{PGCD\{4 \times i + 7 \times j \mid (i,j) \neq (0,0)\}} = \boldsymbol{PGCD\{4,7\}} = \mathbf{1}.$

- La chaîne est donc apériodique

Propriété. Soit une chaîne de Markov apériodique à espace d'état fini E et matrice de transition P. Alors il existe un entier positif N tel que:

$$P_{i,i}^{m} > 0 \text{ pour tout } i \in E \text{ et pour tout } m \geq N$$

En d'autres termes, dans une chaîne de Markov apériodique et finie, on peut retourner à chaque état en un nombre arbitraire d'étapes avec un nombre fini d'exceptions N.

Exemple.

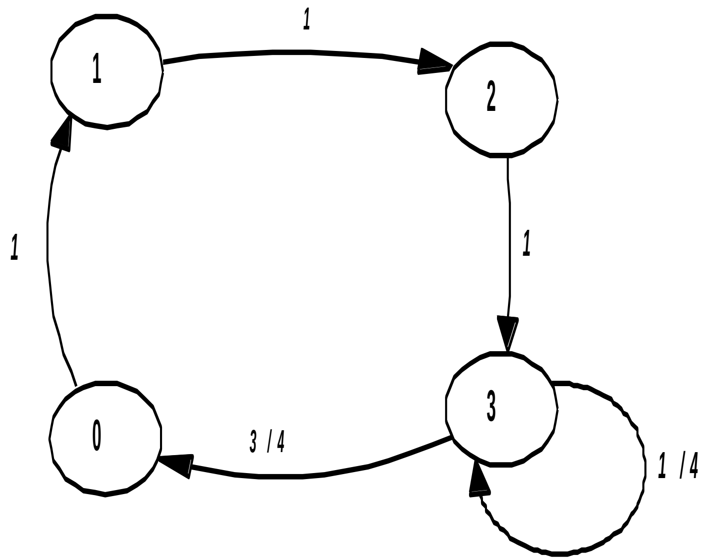
Soit un chaine de Markov à espace d'états $E = \{0,1,2,3\}$, et de de matrice transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que cette chaine de Markov est apériodique
2. Pour chaque état $i \in \{0,1,2,3\}$, déterminer N_i tel que $P_{i,i}^{m} > 0$et pour tout $m \geq N_i$

Chaine de Markov apériodique

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



1. $\mathbf{d(0) = d(1) = d(2) = d(3) = 1}$**,** la chaine est donc apériodique
2. N_i tel que $P_{i,i}^m > 0$et pour tout $m \geq N_i$:

$$\boldsymbol{N_0 = 4, N_1 = 4, N_2 = 4, N_3 = 4}$$

Propriété. Soit une chaîne de Markov apériodique à espace d'état fini E et à matrice de transition P. Alors il existe un entier positif M tel que:

$$P_{i,j}^{m} > 0 \text{ pour tout } i, j \in E \text{ et pour tout } m \geq M$$

Exemple.

Soit un chaine de Markov à espace d’états $E = \{0,1,2,3\}$, et de de matrice transition

1. Démontrer que cette chaine de Markov est apériodique
2. Pour chaque état $i \in \{0,1,2,3\}$, déterminer N_i tel que $P_{i,i}^{m} > 0$et pour tout $m \geq N_i$

Propriété. Soit une chaîne de Markov apériodique à espace d'état fini E et à matrice de transition P. Alors il existe un entier positif M tel que:

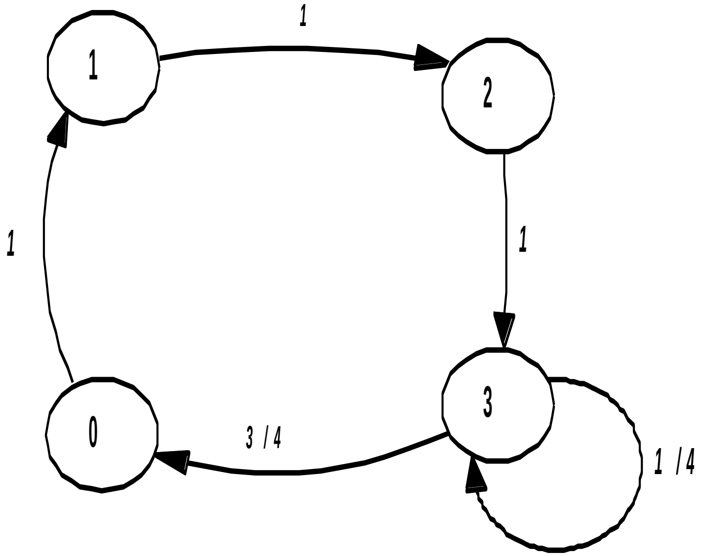
$$P_{i,j}^{m} > 0 \text{ pour tout } i, j \in E \text{ et pour tout } m \geq M$$

En d'autres termes, dans une chaîne de Markov irréductible, apériodique et finie, on peut atteindre chaque état à partir d'un autre état en un nombre arbitraire d'étapes avec un nombre fini d'exceptions M.

Exemple.

Soit un chaine de Markov à matrice transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



$P_{1,3}^{m} > 0$ pour tout $m \geq 2$

$P_{1,0}^{m} > 0$ pour tout $m \geq 3$

…

- Un état est dit **transitoire** si, en partant de cet état au temps t, il existe une probabilité non nulle de ne jamais repasser par cet état. Un état non transitoire est dit récurrent.:

- Soit une chaine de Markov à états dans E, soit $i \in E$

  - $P_{i,i}^{(n)}$: la probabilité que le premier retour en $i \in E$ ait lieu n étapes après l'avoir quitté,

  - $P_{i,i}$: La probabilité de repasser par i après l'avoir quitté:$f_{i,i} = \sum_{n \geq 1} f_{i,i}^{(n)}$

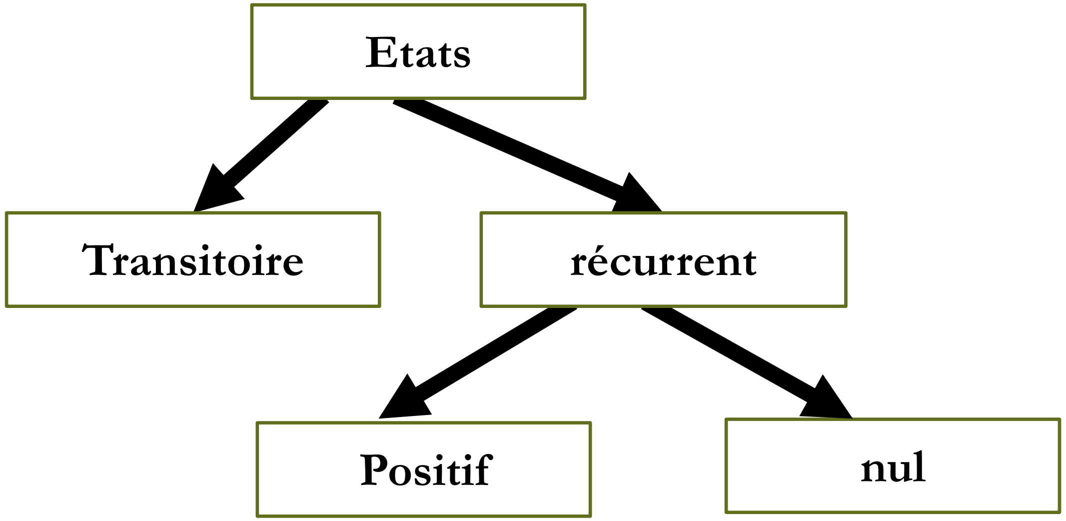
  - μ_i: Le temps moyen de retour en i: $\mu_i = \sum_{n \geq 1} n \times P_{i,i}^{(n)}$

- **Un état x est récurrent si et seulement si:**

$$P_{i,i} = \sum_{n \geq 1} P_{i,i}^{(n)} = 1$$

- μ_i représente le temps moyen de retour en $\boldsymbol{i}$: il peut être infini, même si $\boldsymbol{i}$ est récurrent. On est donc conduit à une classification plus fine des états récurrents:

- Un état récurrent est dit **récurrent positif (non nul) si** $\boldsymbol{\mu_i} < +\infty$. Dans le cas contraire, il est dit **récurrent nul**.



Un état $i \in E$ récurrent nul ne peut exister que dans une chaine de Markov infinie ($\boldsymbol{E}$ est infini).

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov à espace d'états E

- Si i est récurrent $et\ i \rightarrow j$, alors j est récurrent.
- Les états d'une classe d'équivalence C sont tous récurrents (C est une classe récurrente), ou tous transients (C est une classe transiente).
- Une classe C qui n'est pas fermée, est transiente.
- Une classe C fermée et sur un espace fini est récurrente.
- **Une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini est récurrente.**

3.8. Théorème

Théorème

- Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov à espace d'états fini E. Alors elle possède au moins une loi de probabilité stationnaire.
- Si (X_n) est **irréductible**, alors la loi de probabilité stationnaire est **unique**.
- Si (X_n) est **irréductible,** récurrente positive, et **apériodique**, possède une unique distribution stationnaire $\pi = (\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_m})$ tel que:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{p_i}$$

Autrement dit, la distribution de probabilité de la chaîne converge à long terme, indépendamment de la distribution initiale.

P^m converge vers la matrice dont toutes les lignes sont constantes égales à π.

$$P^m = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$$

Propriété

- Si π est une distribution stationnaire d'une chaîne irréductible, alors $\pi_i > 0$ pour tout $i \in E$.

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

4.1. Définition

- Soit $(X_t)_{t \in T}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans l'espace d'état E, et espace du temps $\boldsymbol{T} \subset \mathbb{R}_+$ Cette famille est une chaîne de Markov si elle vérifie la propriété de Markov : pour tout $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in E$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$:

- $P\left(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \middle| X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1} .., X_{t_0} = x_0\right) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$

- Autrement dit la valeur de la variable X_{n+1} ne dépend que de la valeur de la variable X_n, et pas de tous ses états antécédents.

- **Chaîne de Markov à temps continu homogène**
- Une chaîne de Markov **à temps continu** est dite homogène si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout i et j dans E, elle vérifie la propriété suivante :

$$\boxed{P(X_{t+h} = i | X_t = j) = P(X_h = i | X_0 = j)}$$

Autrement dit une chaîne à temps continu est homogène si la probabilité de transition d'un état à l'autre ne dépend des instants t et h, mais de la durée $(t - h)$.

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

4.1. Définition

Chaînes de Markov à temps continu (CMTC) vs Chaînes de Markov à temps discret (CMTD)

- **CMTD:** Le changement vers un nouvel état à des instants discrets : 1, 2, ...,
- **CMTC** : Le changement vers un nouvel état peut intervenir à tout instant $t \geq 0$:
  - Considérer un **CMTC** commençant à l'état $X_0 = i$
  - le processus reste dans l'état i pendant une durée aléatoire : q_i
  - il passe alors à un nouvel état : $X_{w_i} = j$
  - reste dans l'état j pendant une durée aléatoire : $t2$
  - il passe ensuite à un nouvel état $X_{w_i+w_j} = k$
  - …
  - w_i est une variable aléatoire du temps passé à l'état i

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

4.2.Matrice de taux de transition (Générateur infinitésimal) d'une CMTC

- Dans une chaine de Markov à temps continu:
  - Le temps passé dans un état i est une variable aléatoire exponentielle de taux q_i.
  - Le temps d'attente pour la transition d'un état i à un état j est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ_{ij}.où $\lambda_{i,j}$ est le nombre moyen de transition de l'état i à l'état j par unité du temps.
- Plus simplement, sachant que la chaîne X est dans l'état i, elle y reste un temps exponentiel de paramètre q_i puis saute à un nouvel état, en choisissant l'état j avec probabilité $\pi_{i,j}$.

$$\lambda_{ij} = q_i \pi_{ij}$$

Une CMTC sur une espace d'état dénombrable E est défini par une matrice de taux de transitions (ou **Générateur infinitésimal**) $Q = \left(q_{ij}\right)_{i,j \in E}$:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & Si\ i \neq j \\ -q_i = -\sum_{k \neq i} \lambda_{ik} & Si\ i = j \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\sum_{k \neq 0} \lambda_{ik} & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \cdots \\ \lambda_{10} & -\sum_{k \neq 1} \lambda_{ik} & \lambda_{11} & \cdots \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & -\sum_{k \neq 2} \lambda_{ik} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Remarque: Pour toute $i \in E, \sum_{j \in E} q_{ij} = 0$ (La somme des éléments d'une ligne de Q est nulle)

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

4.3. Matrice de probabilités de sauts d'une CMTC

- A un générateur $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$, on associe la matrice de saut $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in E}$ donnée par:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i & \text{si } j \neq i \text{ et } q_i \neq 0, \\ 0 & \text{si } j \neq i \text{ et } q_i = 0, \end{cases}$$

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{si } q_i \neq 0, \\ 1 & \text{si } q_i = 0. \end{cases}$$

- **Remarque:** La matrice Π est stochastique : ces coefficients sont positifs et leur somme sur chaque ligne vaut 1.

4.3. Stationnarité d’une chaine de Markov à temps continu

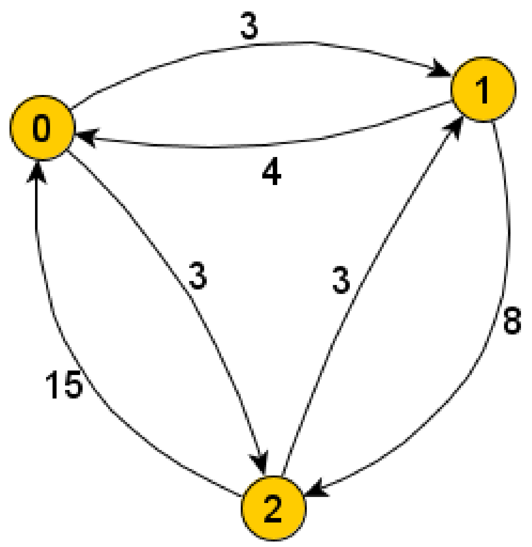
- Une chaine CMTC irréductible à espace d’états fini E est stationnaire.
- Dans ce cas, elle possède une distribution stationnaire unique $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ définit par:

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

Exercice 1

Considérons une chaine de Markov à temps continu décrit par le graphe de taux de transitions suivant:



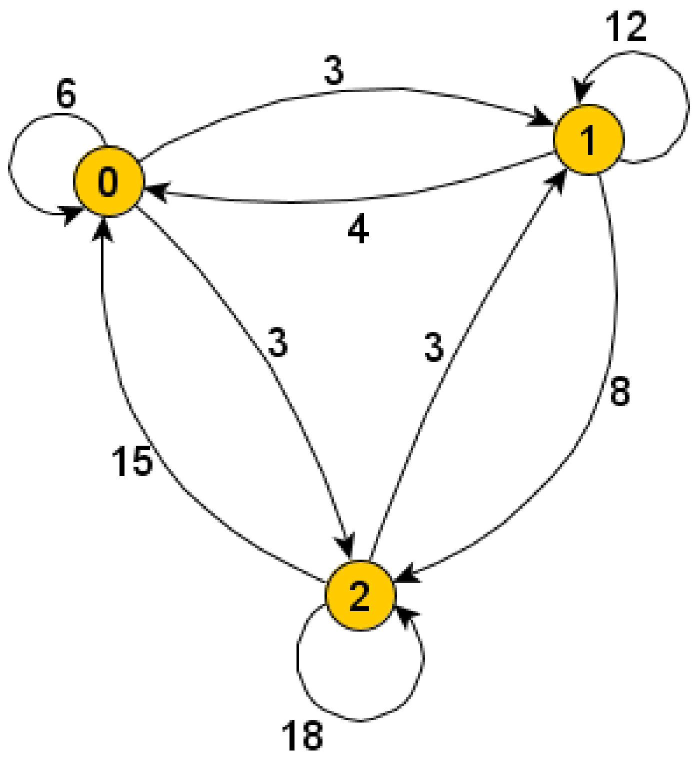
1. Donnez la matrice de taux de transitions (ou Générateur infinitésimal) et la matrice de saut de cette chaine de Markov
2. Démontrer que cette chaine est ergodique, et calculer sa distribution stationnaire.

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

Solution de l'Exercice 1

Générateur infinitésimal $Q = \left(q_{ij}\right)_{i,j \in E}$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & Si\ i \neq j \\ -q_i = -\sum_{k \neq i} \lambda_{ik} & Si\ i = j \end{cases}$$



$q_{00} = -(3+3) = -6$

$q_{01} = 3$

$q_{02} = 3$

$q_{10} = 4$

$q_{11} = -(4+8) = -12$

$q_{12} = 8$

$q_{20} = 15$

$q_{21} = 3$

$q_{22} = -(3+15) = -18$

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 4 & -12 & 8 \\ 15 & 3 & -18 \end{pmatrix}$$

Solution de l'Exercice 1

Matrice de sauts $\boldsymbol{\Pi}$:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i & \text{si } j \neq i \text{ et } q_i \neq 0, \\ 0 & \text{si } j \neq i \text{ et } q_i = 0, \end{cases}$$

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 0 & \text{si } q_i \neq 0, \\ 1 & \text{si } q_i = 0. \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 4 & -12 & 8 \\ 15 & 3 & -18 \end{pmatrix}$$

$\pi_{00} = 0$

$\pi_{01} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\pi_{02} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\pi_{10} = \frac{4}{12} = \frac{1}{4}$

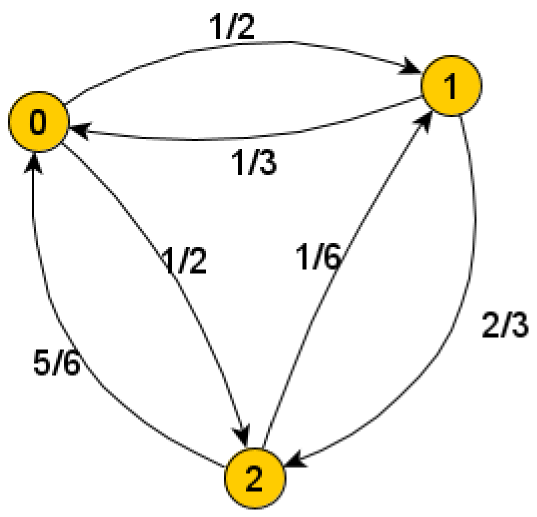
$\pi_{11} = 0$

$\pi_{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$\pi_{20} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

$\pi_{21} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

$\pi_{22} = 0$



$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 5/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

Solution de l'Exercice 1

- Une CMTC est ergodique si:
  - son espace d'état est fini
  - Irréductible

$E = \{0,1,2\}$

$|E| = 3$, donc E est fini

$$\left.\begin{array}{l} 0 \longrightarrow 1 \; et \; 1 \longrightarrow 0: 0 \leftrightarrow 1 \\ 0 \longrightarrow 2 \; et \; 2 \longrightarrow 0: 0 \leftrightarrow 2 \\ 1 \longrightarrow 2 \; et \; 2 \longrightarrow 1: 1 \leftrightarrow 2 \end{array}\right\} \text{La chaine est irréductible}$$

La chaine est finie et irréductible à espace d'états fini, donc, elle est ergodique,

Solution de l'Exercice 1

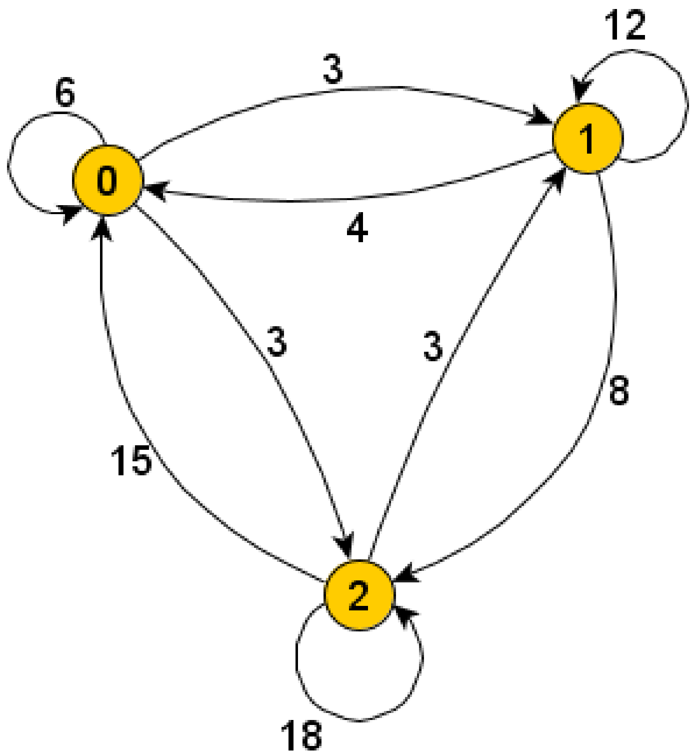
Distribution stationnaire:

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2)\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 4 & -12 & 8 \\ 15 & 3 & -18 \end{pmatrix} = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6\pi_0 + 4\pi_1 + 15\pi_2 = 0 \\ 3\pi_0 - 12\pi_1 + 3\pi_2 = 0 \\ 3\pi_0 + 8\pi_1 - 18\pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = 64/105 \\ \pi_1 = \dfrac{1}{5} \\ \pi_2 = 4/21 \end{cases}$$



$$\boxed{\boldsymbol{\pi} = (64/105 \quad 1/5 \quad 4/21)}$$

Exercice 2

Considérons une machine qui peut être (1) **allumée**, (2) **éteinte**, ou(3) **défectueuse**. Les transitions d'un état à un autre sont régies par les règles suivantes :

- Lorsque la machine est **éteinte**, elle peut passer à l'état **allumée**.
- Lorsque la machine est **allumée**, elle peut soit passer à l'état **éteinte**, soit devenir **défectueuse**.
- Lorsque la machine est **défectueuse**, elle peut être **réparée**, et une fois réparée, la machine retourne à l'état **éteinte**.

Les durées pendant lesquelles la machine reste dans chaque état sont modélisées comme suit :

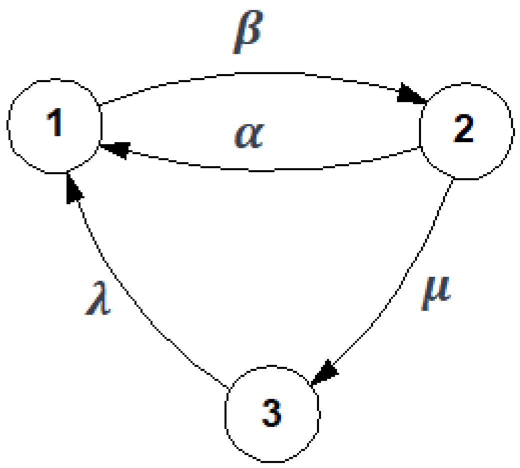
- Les périodes durant lesquelles la machine est **éteinte** suivent une distribution exponentielle avec le paramètre $\boldsymbol{\beta}$.
- Les périodes durant lesquelles la machine est **allumée** avant de passer à l'état **éteinte** suivent une distribution exponentielle avec le paramètre $\boldsymbol{\alpha}$.
- Les périodes durant lesquelles la machine est **allumée** avant de passer à l'état **défectueuse** suivent une distribution exponentielle avec le paramètre $\boldsymbol{\mu}$.
- Le temps de **réparation** de la machine suit une distribution exponentielle avec le paramètre $\boldsymbol{\lambda}$.

1. Donnez la matrice de taux de transitions (Générateur infinitésimal) et le graphe correspondant, ainsi que la matrice de saut de la chaine de Markov qui modélise l'état de la machine
2. Démontrer que cette chaine est ergodique, et calculer sa distribution stationnaire.
3. Calculer les mesures suivantes:
   a. La proportion de temps durant lequel la machine est allumée.
   b. La proportion de temps durant lequel la machine est défectueuse.
   c. La durée moyenne de la panne (ou réparation).

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

Solution de l'Exercice 2

1. Donnez la matrice de taux de transitions (Générateur infinitésimal) et le graphe correspondant, ainsi que la matrice de saut de la chaine de Markov qui modélise l'état de la machine



Générateur infinitésimal Q

$$Q = \begin{pmatrix} -\beta & \beta & 0 \\ \alpha & -(\alpha + \mu) & \mu \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

matrice de saut Π

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha/(\alpha + \mu) & 0 & \mu/(\alpha + \mu) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Démontrer que cette chaine est ergodique, et calculer sa distribution stationnaire.

La chaine de Markov est ergodique ssi: (1) l'espace d'état E est fini et (2) la chaine est irréductible,
$E = \{1,2,3\}$, $|E| = 3$, donc l'espace d'état E est fini

$$\left.\begin{array}{r} 1 \longrightarrow 2 \; et \; 2 \longrightarrow 1 : 1 \leftrightarrow 2 \\ 1 \longrightarrow 2 \; et \; 2 \longrightarrow 3 \; et \; 3 \longrightarrow 1 : 1 \leftrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 3 \; et \; 3 \longrightarrow 1 \; et \; 1 \longrightarrow 2 : 2 \leftrightarrow 3 \end{array}\right\} \text{La chaine est irréductible}$$

La chaine est irréductible à espace d'état fini, donc elle ergodique: elle converge vers un distribution stationnaire unique

Solution de l'Exercice 2

Distribution stationnaire

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\beta} & 0 \\ \boldsymbol{\alpha} & -(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\mu}) & \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} & 0 & -\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\beta\pi_1 + \alpha\pi_2 + \lambda\pi_3 = 0 \\ \beta\pi_1 - (\alpha + \mu)\pi_2 = 0 \\ \mu\pi_2 - \lambda\pi_3 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \pi_3 = \frac{\mu}{\lambda}\pi_2 \\ \pi_1 = \frac{\alpha + \mu}{\beta}\pi_2 \\ \frac{\alpha + \mu}{\beta}\pi_2 + \frac{\mu}{\lambda}\pi_2 + \pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{\lambda\beta}{\lambda(\alpha + \mu) + \beta\mu + \lambda\beta} \end{cases}}$$

a. La proportion du temps durant lequel la machine est allumée: $\pi_2 = \frac{\lambda\beta}{\lambda(\alpha + \mu) + \beta\mu + \lambda\beta}$

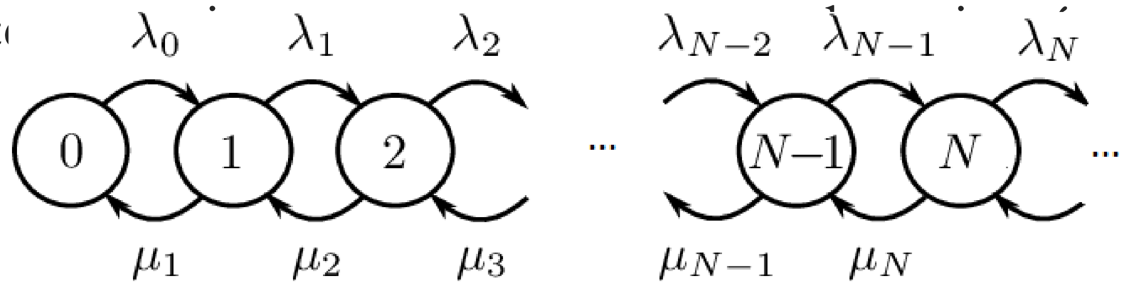
b. La proportion du temps durant lequel la machine est défectueuse: $\pi_3 = \frac{\mu}{\lambda}\pi_2$

c. La durée moyenne de la panne (ou réparation): $\frac{1}{\lambda}$ La durée moyenne durant lequel la machine reste allumée : $\frac{1}{(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\mu})}$

La durée moyenne durant lequel la machine reste éteinte: $\frac{1}{\boldsymbol{\mu}}$

4.4. Processus naissance-mort

- Le processus de naissance-mort (ou processus de naissance et de mort) est une classe de chaines de Markov à temps continu et à espace d'états $E = \{0,1,2,\dots\}$ où les transitions d'état sont de deux types :
  - Les "naissances", où l'état passe de n à $n+1$,
  - Les "décès, où l'état passe de n à $n-1$
- Représentation du proc



- Matrice de taux de transitions (Générateur infinitésimal) du processus naissance-mort:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & \\ \mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

4.4. Processus naissance-mort

- Un processus de naissance-mort est ergodique si et seulement si:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{i}\frac{\mu_n}{\lambda_n} = \infty \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{i}\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} < \infty$$

- Si un processus de naissance-mort est ergodique, alors, il existe une distribution stationnaire $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$ définit par:

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}, k = 1,2, \ldots$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$$

4.5. Avantages et limites des chaines de Markov

- **Adaptées à de nombreux domaines :** Les chaînes de Markov peuvent être utilisées pour modéliser des systèmes dans des domaines tels que l'économie, la biologie, épidémiologie, les files d'attente, etc.
- **Simples à modéliser** à analyser**:** Les chaînes de Markov sont relativement simples à modéliser.
- **Simples à analyser :** Les chaînes de Markov bénéficient de nombreuses propriétés mathématiques bien étudiées, ce qui facilite leur analyse. Les chaînes de Markov sont représentées à l'aide de matrices de transition ou de graphes orientés. En analysant les probabilités de transition entre différents états, il est possible de comprendre la dynamique du système.
- Peuvent être utilisés pour prédire le comportement à long terme d'un système.

4. Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

4.6. Limites des chaines de Markov

- **Absence de memoire (Memoryless property):**
  - Les chaînes de Markov supposent que l'état futur dépend uniquement de l'état actuel et non de la séquence des états précédents.
  - Cette propriété n'est pas adaptées à de nombreux systèmes du monde réel où l'état actuel peut être influencé par une histoire plus longue ou par un ensemble de facteurs plus complexes
- **Hypothèses d'indépendance :**
  - **Les chaînes de Markov font l'hypothèse que** la probabilité de transition d'un état à l'autre ne dépend pas de l'indice du temps mais uniquement de l'état actuel.
  - Dans un système réel, divers facteurs qui changent dans le temps peuvent influencer les probabilités de transitions entre les états, ce qui rend cette hypothèse inappropriée.

Exemple: Marchés financiers: les prix futurs des actions dépendent de **l'historiques** des prix et de facteurs externes (comportement des investisseurs, nouvelles, etc.)

- **Hypothèse de temps d'attente exponentiels :**
  - Les CMTC font l'hypothèse que les temps d'attente pour les transitions entre les états suivent des distributions exponentielles.
  - Cette hypothèse n'est pas toujours valable dans les systèmes du monde réel,