Chapitre 5

DISTRIBUTIONS TEMPEREES ET TRANSFORMATION DE FOURIER

Les distributions tempérées sont des généralisations des fonctions L^p, elles sont "bonnes" pour l'étude de la transformation de $Fourier$. Ce sont des fonctionnelles linéaires continues définies sur l'espace $\mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n)$ (espace de $Schwartz$) des fonctions C^∞ à décroissance rapide à l'infini. L'espace $\mathcal{S}'\ (\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées, le dual topologique de $\mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n)$, est un espace intermédiaire entre l'espace $\mathcal{E}'\ (\mathbb{R}^n)$ et l'espace $D'(\mathbb{R}^n)$ qui possède des propriétés très intéressantes qui ne sont pas vérifiées par d'autres espaces de distributions, en particulier l'invariance de cet espace par la transformation de $Fourier$.

5.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 5 − 1

L'espace de $Schwartz$, qu'on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, est l'espace de toutes les fonctions φ appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\gamma_{\alpha,\ \beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \quad \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n. \tag{5.1}$$

Remarque $5-1$

1- l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2- Il est facile de voir que $\varphi(x) = e^{-a|x|^2}$, $a > 0$, est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mais la fonction $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+|x|^2}$ n'est pas un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème $5-1$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ muni de la famille des semi-normes

$$\gamma_{\alpha,\ \beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \quad \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n \tag{5.2}$$

est un espace vectoriel métrisable et complet.

La convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ peut être caractérisée par

Proposition $5-1$

Une suite de fonctions $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ $(\mathbb{R}^n)$ est dite convergente dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers zéro, quand $k \to +\infty$, si $\gamma_{\alpha,\ \beta}(\varphi_k) \to 0$ quand $k \to +\infty$, $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$; ou encore une suite $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers φ, quand $k \to +\infty$, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si la suite $\{\varphi_k - \varphi\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans vers zéro, quand $k \to +\infty$, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Le lemme suivant donne une autre condition équivalente à la condition (5.1) donnée dans la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Lemme $5-1$

Une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfait la relation (5.1) (i.e. φ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) si et seulement si

$$\tau_{m,\ \beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} D^\beta\varphi\right| < +\infty \quad , \forall m \in \mathbb{N} \text{ et } \forall\beta \in \mathbb{N}^n. \tag{5.3}$$

Preuve

Rappelons d'abord que $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ et notons que

$$|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}| = |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} ... |x_n|^{\alpha_n} \quad \text{et} \quad |x_i| \leq |x| \ ,\ i = 1,\ 2, ..., n. \tag{5.4}$$

Alors il est facile de vérifier que

$$|x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}...|x_n|^{\alpha_n} \leq |x|^{|\alpha|} \leq \left(1+|x|^2\right)^{\frac{|\alpha|}{2}} \leq \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \quad , \ \forall\alpha, \ |\alpha| \leq m. \tag{5.5}$$

Ainsi, si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifie la relation (5.3) alors φ verifie aussi la relation (5.1).

Réciproquement, supposons que φ vérifie la condition (5.1). Puisque on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$|x|^{2k} = \left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\left(x_1^2\right)^{\alpha_1}\left(x_2^2\right)^{\alpha_2}...\left(x_n^2\right)^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}|x^\alpha|^2 \tag{5.6}$$

alors, pour $m \in \mathbb{N}$ on aura

$$\left(1+|x|^2\right)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}|x|^{2k} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\binom{m}{k}\frac{k!}{\alpha!}|x^\alpha|^2 \tag{5.7}$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\left[\binom{m}{k}\frac{k!}{\alpha!}\right]^{\frac{1}{2}}|x^\alpha|\right)^2 \tag{5.8}$$

et donc

$$\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \leq \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\left[\binom{m}{k}\frac{k!}{\alpha!}\right]^{\frac{1}{2}}|x^\alpha| \tag{5.9}$$

par conséquent

$$\tau_{m,\ \beta}(\varphi) \leq \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\left[\binom{m}{k}\frac{k!}{\alpha!}\right]^{\frac{1}{2}}\gamma_{\alpha,\ \beta}(\varphi)\ . \tag{5.10}$$

Des résultats précédents il est facile de démontrer ces propriétés élémentaires.

Propriété 1

Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, les applications

$$\varphi \hookrightarrow x^\alpha\varphi \quad \text{et} \quad \varphi \hookrightarrow D^\alpha\varphi$$

sont des applications linéaires et continues de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors , $x^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, car $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $x^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $x^\alpha\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et en plus si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \quad \forall\sigma,\ \beta \in \mathbb{N}^n \tag{5.11}$$

alors d'après la formunle de *Leibniz*, on peut déduire qu'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^\beta (x^\alpha \varphi(x))\right| < C_0 \sum_{\beta-\alpha\leq\nu\leq\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^{\sigma+\alpha+\nu-\beta} D^\nu \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \quad \forall\sigma,\ \beta\ \in \mathbb{N}^n, \tag{5.12}$$

donc $x^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.

La linéarité de l'application $\varphi \hookrightarrow x^\alpha\varphi$ est évidente et de la relation précédente (5.12) il est facile de vérifier que si $\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quand $k \to 0$, alors $x^\alpha\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quand $k \to 0$, *i.e.* la continuité de l'application $\varphi \hookrightarrow x^\alpha\varphi$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.

De même si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $D^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, car $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $D^\alpha\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et de plus si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \quad \forall\sigma,\ \beta \in \mathbb{N}^n \tag{5.13}$$

alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^\beta (D^\alpha \varphi(x))\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\sigma D^{\beta+\alpha} \varphi(x))\right| < +\infty \quad , \quad \forall\sigma,\ \beta\ \in \mathbb{N}^n, \tag{5.14}$$

donc $D^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$.

De même la linéarité de l'application $\varphi \hookrightarrow D^\alpha\varphi$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est évidente et la continuité se déduit directement de la relation (5.14).

Propriété 2

Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

En effet, si $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors d'après la formunle de *Leibniz*, on peut déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta(\varphi_1(x)\ \varphi_2(x))\right| < C_1 \sum_{\nu\leq\beta} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\nu \varphi_1(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^{\beta-\nu}\varphi_2(x)\right| < +\infty \quad , \ \forall\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{N}^n, \tag{5.15}$$

c'est-à-dire $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Propriété 3

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \quad , \ 1 \leq p \leq +\infty$.

En effet, la première inclusion est évidente i.e. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, car si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\Bbbk = supp\ \varphi$, alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| = \sup_{x\in\Bbbk} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \ \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n \ , \tag{5.16}$$

car $\Bbbk$ est compact et la fonction $x^\alpha D^\beta \varphi(x)$ est de classe C^∞, $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$, et donc $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \quad , \ 1 \leq p \leq +\infty$. Il est assez clair que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ car si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| < +\infty \quad , \ \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n. \tag{5.17}$$

Ainsi pour $|\alpha| = |\beta| = 0$ on a $\sup\limits_x |\varphi(x)| < +\infty$ c'est-à-dire que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Si $1 \leq p < +\infty$ et si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p\, dx \leq \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\right]^{p-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \varphi(x)\right| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}} \ < +\infty \tag{5.18}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq n+1$ et donc $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Dans la suite nous donnerons quelques propriétés de l'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, aussi importantes que les précédentes, que nous énoncerons sous forme de théorèmes.

Théorème 5 − 2

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ avec injection continue.

Preuve

Il faut démontrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ il existe une suite $\{\varphi_k\}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Soit $\rho(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\rho(x) = 1 \text{ si } |x| \leq 1 \ , \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad \rho(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq 2\ . \tag{5.19}$$

Alors pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $k = 1,\ 2, ...,$ on définit

$$\varphi_k(x) = \varphi(x)\rho(\frac{x}{k}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left|x^\alpha \left[D^\beta \varphi_k(x) - D^\beta \varphi(x)\right]\right| &= \left|x^\alpha \left[D^\beta \varphi(x)\rho(\frac{x}{k}) - D^\beta \varphi(x)\right]\right| \\ &= \left|x^\alpha D^\beta \left[\varphi(x)\left(1 - \rho(\frac{x}{k})\right)\right]\right| \\ &= \left|x^\alpha \sum_{\nu \leq \beta} \begin{pmatrix} \beta \\ \nu \end{pmatrix} D^{\beta-\nu}\varphi(x) D^\nu \left(1 - \rho(\frac{x}{k})\right)\right|. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Remarquons d'abord que

$$0 \leq 1 - \rho(x) \ \leq |x|^2$$

car

$$1 - \rho(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \leq 1 \quad \text{et que} \quad 0 \leq 1 - \rho(x) \ \leq 1 \quad \text{si} \quad |x| > 1,$$

c'est-à-dire que $0 \leq 1 - \rho(\frac{x}{k}) \leq \frac{|x|^2}{k^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi donc pour tous les multi-indices $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \left(1 - \rho(\frac{x}{k})\right) \right| \le \frac{1}{k^2} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left| x \right|^2 D^\beta \varphi \right| . \tag{5.21}$$

Sachant que pour tout multi-indice $\nu \in \mathbb{N}^n, |\nu| \ge 1$:

$$D^\nu (1 - \rho(\frac{x}{k})) = k^{-|\nu|} \rho^{(\nu)}(\frac{x}{k}) \to 0 \quad \text{quand } k \to +\infty \tag{5.22}$$

uniformément pour tout x dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ car

$$\left| D^\nu \left(1 - \rho(\frac{x}{k})\right) \right| \le k^{-|\nu|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| D^\nu \rho(\frac{x}{k}) \right| = k^{-|\nu|} \sup_{|x|\le 2} \left| \rho^{(\nu)}(x) \right| \to 0 \ \text{ quand } k \to +\infty. \tag{5.23}$$

Alors

$$\gamma_{\alpha,\ \beta}(\varphi_k - \varphi) \le \frac{1}{k^2} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \left| x \right|^2 D^\beta \varphi \right| + \sum_{\substack{\nu\le\beta \\ |\nu|\ge 1}} \binom{\beta}{\nu} \gamma_{\alpha,\ \beta-\nu}(\varphi) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| D^\nu \left(1 - \rho(\frac{x}{k})\right) \right| \to 0 \text{ quand } k \to +\infty. \tag{5.24}$$

D'où la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Montrons aussi que l'injection de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue i.e il faut montrer que la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En effet soit $\{\varphi_k\}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,alors toutes les fonctions $\varphi_k(x)$ s'annulent en dehors d'un domaine borné $|x| = R > 1$; et donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \varphi_k(x) \right| \le R^{|\alpha|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| D^\beta \varphi_k(x) \right| \to 0 \ \text{ lorsque } k \to +\infty. \tag{5.25}$$

C'est-à-dire que la suite $\{\varphi_k\}$ converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 5 – 3

L'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec injection continue.

Preuve

On sait déjà que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce qui implique que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ car on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Il reste à démontrer que l'injection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est continue. Soit $\{\varphi_k\}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ montrons qu'elle converge vers zéro dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Alors pour tout compact $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}^n$ on a

$$\sup_{\mathbb{k}} \left|D^\beta \varphi_k(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}} D^\beta \varphi_k(x)\right| \to 0 \text{ lorsque } k \to +\infty \tag{5.26}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^n$, ce qui implique la convergence de $\{\varphi_k\}$ vers zéro dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 5 – 4

L'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$ avec injection continue.

Preuve

On sait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, et puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $1 \leq p < +\infty$.

Montrer que l'injection est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$. Soit $\{\varphi_k\}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ montrons qu'elle converge vers zéro dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En effet d'après l'inégalité (5.18) on a

$$\|\varphi_k\|_p^p \leq C \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_k(x)|\right]^{p-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \varphi_k(x)\right| \to 0 \ \text{, lorsque } k \to +\infty \ , \quad (5.27)$$

où $C = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}}}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq n+1$.

5.2 L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Définition 5 – 2

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, où la continuité dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est définie de la même manière que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, et les éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sont appelés les distributions tempérées.

Donc une application linéaire $f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\exists k, l \in \mathbb{N},\ \exists C > 0 \ : |\langle f \ ; \ \varphi\rangle| \ \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ |\beta|\leq l}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \varphi(x)\right| \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \qquad (5.28)$$

La convergence des suites dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est définie de la même manière que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 5 – 3

Une suite $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est dite convergente vers f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\langle f_k \ , \ \varphi\rangle \to \langle f \ , \ \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quand $k \to \infty$.

Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\langle f \ , \ \varphi\rangle$ est bien définie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Il est assez clair que ça définit une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et puisque la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et donc $\langle f \ , \ \varphi_k\rangle \to 0$ quand $\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i.e. f est une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et par suite $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

De même si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ alors $\langle f \ ; \ \varphi \rangle$ est bien définie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et puisque la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ implique la convergence dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et alors $\langle f \ , \ \varphi_k \rangle \to 0$ quand $\varphi_k \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i.e. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ce qu'on peut exprimer par le théorème suivant :

<u>Théorème 5 − 5</u>

On a les inclusions suivantes

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

et que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>Remarque 5 − 2</u>

On peut voir par exemple que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace propre de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i.e. que l'inclusion de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est stricte.

En effet soit la série $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} e^{k^2}\delta(t-k)$ qui est une série convergente dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et qui définit une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, mais elle ne converge pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\langle f \ , \ \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{k^2}\varphi(k) \tag{5.29}$$

puisque φ est à support compact et donc la série ne posséde qu'un nombre fini de termes. D'autre part, si on prend $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors la série (5.29) ne converge pas et donc $f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

<u>Proposition 5 − 2</u>

$L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, est un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>*Preuve*</u>

En effet tout élément $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$|\langle f \ , \ \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx\right| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty \ \ (\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \ ; \text{ inégalité de } H\ddot{o}lder) \ , \tag{5.30}$$

car $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$. En plus, d'après l'injection continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ i.e. si la suite $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors elle converge vers zéro dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ et d'après l'inégalité (5.30) on a $\langle f \ , \ \varphi_k\rangle \to 0$ quand $k \to \infty$. Alors f est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i.e. $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemples

(i) Tout polynôme $P(x) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, définit une distribution tempérée par :

$$\langle f \ , \ \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} P(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En effet

$$\begin{aligned}|\langle f \ , \ \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\varphi(x)dx\right| &\leq \sum_{|\alpha|\leq m} |a_\alpha| \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \varphi(x)| \, dx \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq m} |a_\alpha| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{m}{2}} |\varphi(x)| \, dx \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq m} |a_\alpha| \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} dx\right] \tau_{m+2n, \ 0}(\varphi) < \infty \end{aligned} \tag{5.31}$$

La continuité de f résulte de l'inégalité précédente (5.31), et la linéarité est évidente.

(ii) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[(1+|x|^2)^{-\frac{m}{2}} |f(x)|\right] < \infty \tag{5.32}$$

une telle fonction s'appelle une fonction à croissance lente à l'infini ou fonction tempérée.

Cette fonction définit une distribution tempérée, en effet

$$\langle f \ , \ \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Alors

$$\begin{aligned} |\langle f \ , \ \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-\frac{m}{2}} |f(x)| (1+|x|^2)^{\frac{m}{2}} |\varphi(x)| \, dx \quad , \ m \in \mathbb{N} \ , \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[(1+|x|^2)^{-\frac{m}{2}} |f(x)|\right] \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\frac{m}{2}+n} |\varphi(x)| (1+|x|^2)^{-n} dx \quad , \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left[(1+|x|^2)^{-\frac{m}{2}} |f(x)|\right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} dx\right] \ \tau_{m+2n, \ 0}(\varphi). \end{aligned} \tag{5.33}$$

En utilisant cette inégalité on peut facilement voir que f est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Toute dérivée au sens des distributions d'une fonction tempérée continue est encore une distribution tempérée. En effet, pour $g = D^\alpha f$, où f est une fontion tempérée, alors

$$\langle g \ , \ \varphi \rangle = (-1)^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

et la conclusion résulte de l'exemple précédent.

(iv) La fonction $f(x) = e^x \cos(e^x), \ x \in \mathbb{R}$, n'est pas une fonction tempérée mais elle définit une distribution tempérée.

En effet, il est facile de voir qu'il n'existe pas un $m \in \mathbb{N}$ tel que $|x|^{-m} e^x \cos(e^x)$ soit bornée quand $x \to +\infty$.

Mais pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx\right| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\cos(e^x)\varphi(x)dx\right| == \left|[\sin(e^x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(e^x)\varphi'(x)dx\right|; \\ &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(e^x)\varphi'(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|^2)\,|\varphi'(x)|\,(1+|x|^2)^{-1}dx \;; \\ &\leq \pi \sup_{x\in\mathbb{R}}\left[(1+|x|^2)\,|\varphi'(x)|\right] \;, \end{aligned} \tag{5.34}$$

ce qui définit une distribution tempérée.

5.3 La transformation de *Fourier* dans l'espace $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$

__**Définition 5 – 4**__

La transformée de *Fourier* d'une fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\hat{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\varphi(x)dx \;,\; \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{où} \quad x\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k\xi_k. \tag{5.35}$$

Il est clair que

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\,dx \; = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n \;, \tag{5.36}$$

c'est-à-dire que $\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De plus, si $\{\xi_k\}$est une suite de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers ξ, alors

$$|\hat{\varphi}(\xi_k) - \hat{\varphi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\exp(-ix\xi_k) - \exp(-ix\xi)|\,|\varphi(x)|\,dx \;. \tag{5.37}$$

D'après le théorème de la convergence dominée de *Lebesgue*, le second membre de l'inégalité de (5.37) converge vers zéro quand $k \to +\infty$, et donc $\hat{\varphi}(\xi)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. En conclusion la transformée de *Fourier* d'une fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est une une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$.

En général, $\hat{\varphi}$ n'est pas intégrable. Par exemple la fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \ ; \\ \\ 0 & \text{sinon} \quad\quad ; \end{cases}$$

alors $\hat{\varphi}(\xi) = 2\dfrac{\sin\xi}{\xi} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Mais si $\hat{\varphi}$ est intégrable on peut exprimer φ en fonction de $\hat{\varphi}$ par la formule de *Fourier* inverse

$$\varphi(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi}\right)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \ , \ x \in \mathbb{R}^n \quad . \tag{5.38}$$

Quand f et $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a aussi $f\ \hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, car $\hat{\varphi}$ est une fonction bornée et de plus on a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\varphi(\xi)d\xi \right) dx \ , \tag{5.39}$$

d'après le théorème de $Fubini$ on aura donc

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)f(x)dx \right) d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\ d\xi \tag{5.40}$$

qui est appelée formule de $Parseval$ de la transformée de *Fourier*.

Une autre formule qui se déduit directement de la formule précédente (5.40) est

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(-x)dx \ ; \tag{5.41}$$

d'où on aura immédiatement

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{5.42}$$

De la définition de la transformation de *Fourier* et des relations précédentes il est facile de déduire les propriétés suivantes.

Propriété 1 Si φ et $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(x) = (2\pi)^{-n} \left(\mathcal{F}\check{\varphi}(\xi)\right)(x) \;\;, \quad \text{où} \quad \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi). \tag{5.43}$$

Propriété 2 Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors

$$D_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha \varphi)(\xi) = ((\widehat{-ix)^\alpha} \varphi)(\xi) \;\;, \quad \text{où} \quad D_\xi^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} ... \partial \xi_n^{\alpha_n}} \;\;. \tag{5.44}$$

Propriété 3 Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $D_x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour α un multi-indice de $\mathbb{N}^n$ alors

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha \varphi)(\xi) = \widehat{(D_x^\alpha \varphi)}(\xi) = (i\xi)^\alpha \;\; \hat{\varphi}(\xi) = , \quad \text{où} \quad D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \;\;. \tag{5.45}$$

5.4 La transformation de *Fourier* dans l'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Pour pouvoir étendre la transformation de *Fourier* aux distributions tempérées on va d'abord l'étudier dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ alors on définira la transformée de *Fourier* d'une fonction φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la même relation (5.35) i.e.

$$\hat{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\varphi(x)dx \;,\; \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.46}$$

Le résultat suivant est très particulier et très intéressant, qui est une caractérisation très spéciale de la transformation de *Fourier* sur l'espace de *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 5 – 5

La transformation de *Fourier* $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \text{identité de } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve

Montrons tout d'abord que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ envoient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{F}^{-1}\varphi = (2\pi)^{-n}\,\mathcal{F}\left(\check{\varphi}\right)$, alors il suffit de le faire pour $\mathcal{F}$.

Tout d'abord, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet pour tout x fixé de $\mathbb{R}^n$ la fonction $\xi \mapsto \exp(-ix\xi)\varphi(x)$ est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\left|D_\xi^\beta\left(\exp(-ix\xi)\varphi(x)\right)\right| = \left|(-ix)^\beta \exp(-ix\xi)\varphi(x)\right| = \left|x^\beta\varphi(x)\right| \in L^1(\mathbb{R}^n)\ , \tag{5.47}$$

et par suite $D_\xi^\beta\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi)$ pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^n$ i.e. $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$D_\xi^\beta\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)(-ix)^\beta\varphi(x)dx. \tag{5.48}$$

Par des intégrations par parties successives on peut facilement montrer que pour α et $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a

$$(i\xi)^\alpha\, D_\xi^\beta\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)D_x^\alpha\left((-ix)^\beta\varphi(x)\right)dx\ , \tag{5.49}$$

on déduit alors que

$$\left|\xi^\alpha D_\xi^\beta\left(\mathcal{F}\varphi\right)(\xi)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|D_x^\alpha\left(x^\beta\varphi(x)\right)\right| dx < +\infty\ ,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.50}$$

Ce qui prouve que $\hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et d'après la formule de *Leibniz* l'application $\varphi \mapsto \mathcal{F}\varphi$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La linéarité est évidente par définition de la transformation de *Fourier*.

De même d'après les propriétés de la transformation de *Fourier*, données plus haut sur l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$, on sait que pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right) = \varphi = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\varphi\right) \quad ,$$

ce qui prouve que l'application $\mathcal{F}$ est injective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (resp. $\mathcal{F}^{-1}$).

Remarque $5-3$

Puisque pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, on sait que $x^\alpha\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $D_x^\alpha\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, alors la transformation de *Fourier* dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ possède les mêmes propriétés que dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$.

5.5 La transformation de *Fourier* dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

D'après la formule de *Parseval* (5.40) on sait que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi \ , \tag{5.51}$$

par l'utilisation de cette relation (5.51) on est bien motivé pour définir la transformée de *Fourier* d'une distribution tempérée. S'il n'y a pas d'inconvénient on notera par $\mathcal{F}f = \hat{f}$ la transformée de *Fourier* d'une distribution tempérée f.

Définition $5-5$ (*Théorème*)

Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la transformée de *Fourier* de f , notée $\mathcal{F}f$ où $\hat{f}$, est la forme linéaire définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle \mathcal{F}f\ ,\ \varphi\rangle = \langle f\ ,\ \mathcal{F}\varphi\ \rangle \quad ,\ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\ ; \tag{5.52}$$

et $\mathcal{F}f$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i.e. $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

En effet, la linéarité de $\mathcal{F}f$ se déduit de la linéarité de f et de la linéarité de transformation de *Fourier* sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La continuité est une conséquence de la continuité de f sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car $\exists C > 0$ et $k, l \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle \mathcal{F}f \ , \ \varphi\rangle| = |\langle f \ , \ \mathcal{F}\varphi \ \rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ |\beta|\leq l}} \gamma_{\alpha, \ \beta}(\mathcal{F}\varphi) \ , \ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{5.53}$$

Comme la transformation de *Fourier* $\mathcal{F}$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors chaque semi-norme $\gamma_{\alpha, \ \beta}(\mathcal{F}\varphi)$ est majorée par des semi-normes de φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, d'où la continuité de $\mathcal{F}f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

De la définition précédente on est en mesure d'énoncer un théorème analogue au théorème 2-5, qui concerne la transformation de *Fourier* pour les distributions tempérées.

Théorème $5-6$

La transformation de *Fourier* $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue sur les suites de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} \ f = f \quad , \quad \forall \ f \in \ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Preuve

Cela résulte de la définition (5.52). En effet

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} \ f = f \ \text{ pour tout } f \in \ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ ,$$

car

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f \ , \ \varphi\right\rangle = \left\langle f \ , \ \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi \ \right\rangle = \langle f \ , \ \varphi \ \rangle \quad , \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ ;$$

de même

$$\left\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f \ , \ \varphi\right\rangle = \left\langle f \ , \ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi \ \right\rangle = \langle f \ , \ \varphi \ \rangle \quad , \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Donc $\mathcal{F}$ est bijective. Ensuite, si $f_k \to f$, quand $k \to +\infty$, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\langle \mathcal{F} f_k \ , \ \varphi \rangle = \langle f_k \ , \ \mathcal{F}\varphi \ \rangle \to \langle f \ , \ \mathcal{F}\varphi \ \rangle = \langle \mathcal{F} f \ , \ \varphi \ \rangle \ , \ \text{quand } k \to +\infty,$$

i.e. $\mathcal{F} f_k \ \to \mathcal{F} f$, quand $k \to +\infty$, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De la même manière on démontre que $\mathcal{F}^{-1}$ est continue sur les suites de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple

Soit $g = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k \ \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\langle \mathcal{F} g \ , \ \varphi \rangle = \langle g \ , \ \mathcal{F}\varphi \ \rangle = \lim_{m \to +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} g_k \ , \ \mathcal{F}\varphi \right\rangle = \lim_{m \to +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m} \mathcal{F} g_k \ , \ \varphi \right\rangle \ , \tag{5.54}$$

et donc $\quad \mathcal{F} g = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{F} g_k$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ce qui n'est pas vrai dans le sens classique.

5.5.1 Propriétés de la transformation de *Fourier* dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Les propriétés suivantes sont vérifiées dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et elles sont similaires à celles données dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Propriété 1 (Dérivation de la transformée de *Fourier*)

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$D_\xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f)(\xi) = (\widehat{(-ix)^\alpha f})(\xi) \quad , \quad \text{où} \quad D_\xi^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}}. \tag{5.55}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned} \left\langle D_\xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi) \ , \ \varphi(\xi) \right\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \left\langle \mathcal{F}[f](\xi), \ D_\xi^\alpha \varphi(\xi) \right\rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle f(x) \ , \ \mathcal{F}\left[D_\xi^\alpha \varphi(\xi)\right](x) \right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(x) \ , \ (ix)^\alpha \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle = \langle (-ix)^\alpha f(x) \ , \ \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[(-ix)^\alpha f(x)](\xi) \ , \ \varphi(\xi) \rangle . \end{aligned} \tag{5.56}$$

En prenant $f = 1$ il est facile de voir que

$$\mathcal{F}\left[x^{\alpha}\right](\xi) = (i)^{|\alpha|}\, D_{\xi}^{\alpha}\mathcal{F}\left[1\right](\xi) = (2\pi)^{n}\,(i)^{|\alpha|}\, D_{\xi}^{\alpha}\delta(\xi). \tag{5.57}$$

Propriété 2 (La transformée de *Fourier* de la dérivée)

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\mathcal{F}\left[D_x^{\alpha} f\right](\xi) = (i\xi)^{\alpha}\mathcal{F}\left[f\right](\xi) = (i\xi)^{\alpha}\hat{f}(\xi) \quad , \quad \text{où} \quad D_x^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{5.58}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\left[D_x^{\alpha} f\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\right\rangle &= \left\langle D_x^{\alpha} f\ (x),\ \mathcal{F}\left[\varphi(\xi)\right](x)\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle f(x)\ ,\ D_x^{\alpha}\mathcal{F}\left[\varphi\right](x)\right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\left\langle f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[(-i\xi)^{\alpha}\varphi\right](x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi)\ ,\ (i\xi)^{\alpha}\varphi(\xi)\right\rangle \\ &= \left\langle (i\xi)^{\alpha}\mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\right\rangle. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Si on prend $f = \delta$ on aura

$$\mathcal{F}\left[D_x^{\alpha}\delta\right](\xi) = (i\xi)^{\alpha}\mathcal{F}\left[\delta\right](\xi) = (i\xi)^{\alpha}. \tag{5.60}$$

Propriété 3 (La transformée de *Fourier* d'une translatée)

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathcal{F}\left[f(x - x_0)\right](\xi) = \exp(-ix_0\xi)\ \mathcal{F}\left[f\right](\xi), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{5.61}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\left[f(x - x_0)\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\right\rangle &= \left\langle f\ (x - x_0),\ \mathcal{F}\left[\varphi(\xi)\right](x)\right\rangle = \left\langle f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[\varphi(\xi)\right](x + x_0)\right\rangle \\ &= \left\langle f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[\exp(-ix_0\xi)\varphi\right](x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi)\ ,\ \exp(-ix_0\xi)\varphi(\xi)\right\rangle \\ &= \left\langle \exp(-ix_0\xi)\mathcal{F}\left[f(x)\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\right\rangle. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Propriété 4 (La translatée d'une transformée de *Fourier*)

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathcal{F}\left[f\right](\xi - \xi_0) = \mathcal{F}\left[\exp(ix\xi_0)f\right](\xi), \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{5.63}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\left[f\right](\xi - \xi_0)\ ,\ \varphi(\xi)\rangle &= \langle \mathcal{F}\left[f\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi + \xi_0)\rangle = \langle f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[\varphi(\xi + \xi_0)\right](x)\rangle \\ &= \langle f(x)\ ,\ \exp(ix\xi_0)\mathcal{F}\left[\varphi\right](x)\rangle = \langle \exp(ix\xi_0)f(x)\ ,\ \mathcal{F}\left[\varphi\right](x)\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}\left[\exp(ix\xi_0)f\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Exemple

En utilisant la définition de la transformée de *Fourier* d'une distribution tempérée (5.52) et les propriétés précédentes on peut facilement voir que

$$(i) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}\left[\delta(x-a)\right](\xi) = \exp(-ia\xi)\ ,\quad \xi\ \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ a \in \mathbb{R}^n\ , \\ \text{et} \\ \mathcal{F}\left[(\exp(iax)\right](\xi) = (2\pi)^n \delta(\xi - a), \quad \xi\ \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ a \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$(ii) \qquad \begin{cases} \mathcal{F}\left[D_x^\alpha \delta(x-a)\right](\xi) = (i\xi)^\alpha \exp(-ia\xi)\ ,\ \xi\ \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ \alpha \in \mathbb{N}^n, \\ \text{et} \\ \mathcal{F}[(-ix)^\alpha \exp(iax)](\xi) = (2\pi)^n D_\xi^\alpha \delta(\xi - a),\ \xi\ \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}^n \text{ et } \ \alpha \in \mathbb{N}^n. \end{cases}$$

Montrons d'abord (i). En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}\left[\delta(x-a)\right](\xi)\ ,\ \varphi(\xi)\rangle &= \langle \delta(x-a),\ (\mathcal{F}\varphi)(x)\rangle \\ &= \hat{\varphi}(a) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ia\xi}\varphi(\xi)d\xi = \left\langle\ e^{-ia\xi}\ ,\ \varphi(\xi)\right\rangle\ ,\end{aligned} \tag{5.65}$$

d'où $\mathcal{F}\left[\delta(x-a)\right](\xi) = \exp(-ia\xi)$ et donc pour $a = 0$ on aura $\mathcal{F}\left[\delta\right] = 1$.

Par application de $\mathcal{F}^{-1}$ on peut voir que

$$\delta(x-a) = \mathcal{F}^{-1}\left[\exp(-ia\xi)\right] = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\left[(\exp(-ia\xi))\check{}\right] = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}\left[(\exp(ia\xi)\right] \ , \quad (5.66)$$

d'où $\mathcal{F}\left[(\exp(iax)\right](\xi) = (2\pi)^n\delta(\xi-a)$ et donc pour $a = 0$ on aura $\mathcal{F}\left[1\right] = (2\pi)^n \ \delta$.

Montrons maintenant (ii). En effet pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\left[D_x^\alpha\delta(x-a)\right](\xi) \ , \ \varphi(\xi)\right\rangle &= \left\langle D_x^\alpha\delta(x-a), \ (\mathcal{F}\varphi)(x)\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle\delta(x-a), \ D_x^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(x)\right\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \ D_x^\alpha(\mathcal{F}\varphi)(a) = (-1)^{|\alpha|} \ \mathcal{F}\left[(-i\xi)^\alpha\varphi\right](a) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(i\xi)^\alpha\exp(-ia\xi)\varphi(\xi)d\xi = \left\langle(i\xi)^\alpha\exp(-ia\xi), \ \varphi(\xi)\right\rangle .\end{aligned} \quad (5.67)$$

Par l'utilisation de la transformation de *Fourier* inverse on déduit facilement que

$$\begin{aligned}D_x^\alpha\delta(x-a) &= \mathcal{F}^{-1}\left[(i\xi)^\alpha\exp(-ia\xi)\right](x) = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}[((i\xi)^\alpha\exp(-ia\xi))\check{}](x) \\ &= (2\pi)^{-n}\mathcal{F}[(-i\xi)^\alpha\exp(ia\xi)](x)\end{aligned} \quad (5.68)$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}[(-ix)^\alpha\exp(iax)] = (2\pi)^n D_\xi^\alpha\delta(\xi-a). \quad (5.69)$$

5.5.2 Théorème de convolution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Ce qu'on entend par théorème de convolution c'est la relation

$$\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \quad (5.70)$$

qui a un rôle important dans la théorie de la transformation de *Fourier*, en particulier dans ses applications aux équations différentielles.

La relation (5.70) est vérifiée par exemple quand f et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ce qu'on peut voir par utilisation du théorème de $Fubini$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi)\,(f * g)\,(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \right] dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(x-y)\xi)\exp(-iy\xi)f(y)g(x-y)dydx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-iy\xi) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-i(x-y)\xi)g(x-y)dx \right] f(y)dy \\
&= \hat{g}(\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-iy\xi)f(y)dy = \hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Ainsi par application de la transformation de $Fourier$ inverse on peut facilement conclure que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à chaque fois que f et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De la même manière on peut facilement vérifier que pour f et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathcal{F}^{-1}[f * g] = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}[f]\mathcal{F}^{-1}[g] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{5.72}$$

On sait aussi, d'après le chapitre 1, que le produit de convolution de deux distributions quelconques peut ne pas être défini et que si l'une au moins des deux distributions est à support compact, i.e. appartient à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, leur produit de convolution aura un sens et définit une distribution dans un sens bien précis.

Soient maintenant $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et en utilisant la même définition (4.22) du chapitre 1, pour le produit de convolution, on définit le produit de convolution $f * g$ comme étant la fonctionnelle donnée par

$$\langle f * g\ ,\ \varphi \rangle = \langle f(x)\ ,\ \psi(x) \rangle \tag{5.73}$$

où

$$\psi(x) = \langle g(y)\ ,\ \varphi(x+y) \rangle\ , \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{5.74}$$

c'est-à-dire

$$\psi(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)\varphi(x+y)dy=\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y-x)\varphi(y)dy$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} \check{g}(x-y)\varphi(y)dy=(\varphi*\check{g})(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{5.75}$$

ce qui montre que la relation (5.73) est bien définie.

Il est bien clair que le produit de convolution $f*g$, pour $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, défini par la relation (5.73) est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour montrer la continuité, on prend une suite $\{\varphi_k\}_k$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers zéro dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\psi_k(x)=(\varphi_k*\check{g})(x)=\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left[\varphi_k*\check{g}\right]\right)(x)$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}\left[\varphi_k\right]\mathcal{F}\left[\check{g}\right]\right)(x)\to 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{5.76}$$

par continuité de la transformation de *Fourier* et de la transformation de *Fourier* inverse dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Donc $\langle f*g\ ,\ \varphi_k\rangle=\langle f(x)\ ,\ \psi_k(x)\rangle\to 0$ quand $k\to+\infty$. Ainsi $f*g\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, i.e. une distribution tempérée.

Enonçons maintenant le théorème de convolution pour les distributions.

Théorème 5 − 7 (*Théorème de convolution*)

Soient $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]. \tag{5.77}$$

Preuve

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f * g] \ , \ \varphi \rangle &= \langle f * g \ , \ \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle f(x) \ \ , \ \langle g(y) \ , \ \mathcal{F}[\varphi](x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle f(x) \ \ , \ \mathcal{F}[\varphi] * \check{g} \rangle \, . \end{aligned} \tag{5.78}$$

En utilisant la relation (5.70), le théorème de convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et la formule d'inversion on aura

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi] * \check{g} &= \mathcal{F}[\varphi] * \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}[\check{g}]\right) = (2\pi)^{-n} \mathcal{F}[\varphi] * \mathcal{F}(\mathcal{F}[g]) \\ &= (2\pi)^{-n} \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}[\varphi] * \mathcal{F}(\mathcal{F}[g])\right)\right] = \mathcal{F}[\varphi \mathcal{F}[g]] \ , \end{aligned} \tag{5.79}$$

et donc

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f * g] \ , \ \varphi \rangle &= \langle f(x) \ \ , \ \mathcal{F}[\varphi \mathcal{F}[g]] \rangle = \langle \mathcal{F}[f] \ \ , \ \varphi \mathcal{F}[g] \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[f] \ \mathcal{F}[g] \ , \ \varphi \rangle \, . \end{aligned} \tag{5.80}$$

5.6 Exercices

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}, \ a > 0$. Calculer les transformeés de *Fourier* des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq \dfrac{a}{2} \\ 0 & si \quad |x| > \dfrac{a}{2} \end{cases}$; 2) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{a} & si \quad |x| \leq a \\ 0 & si \quad |x| > a \end{cases}$;

$$3)\quad f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & si \quad x \geq 0 \\ \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases} \quad ; \quad 4) \;\; f(x) = e^{-a|x|} \quad ; \quad 5) \;\; f(x) = e^{-ax^2} \; .$$

Exercice 2

Soit f une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R})$.

1) Montrer que la transformée de *Fourier* de f peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \hat{f}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f_{paire}(x) \; \cos(\omega x) \; dx \; - \; 2i\int_0^{+\infty} f_{impaire}(x) \; \sin(\omega x) \; dx \; ,$$

où $f_{paire}(x)$ désigne une fonction paire et $f_{impaire}(x)$ désigne une fonction impaire.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la transformée de *Fourier* d'une fonction réelle soit réelle.

3) Montrer que si f est une fonction paire, alors

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \hat{f}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) \; dx \; ;$$

et que si f est une fonction impaire, alors

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \hat{f}(\omega) = - \; 2i\int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) \; dx.$$

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions données par :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad |x|\leq \dfrac{1}{2} \\ \\ 0 & si \quad |x|>\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad ; \qquad g(x)=\begin{cases} 1-|x| & si \quad |x|\leq 1 \\ \\ 0 & si \quad |x|>1 \end{cases} .$$

1) Calculer la transformée de *Fourier* de la fonction f .

2) Montrer que

$$g^{'}(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x-\frac{1}{2}).$$

3) Calculer la transformée de *Fourier* de $g^{'}(x)$ et en déduire celle de $g(x)$.

4) Sachant que le produit de convolution $(f*f)(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. Calculer la transformée de *Fourier* de $(f*f)(x)$ et déterminer $(f*f)(x)$.

Exercice 4

En utilisant la transformée de *Fourier* :

1) Déterminer la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\quad a>0$$

avec la condition initiale : $u(x,0) = \varphi(x)$. $\left[Ind : \mathcal{F}\left[e^{-\alpha x^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \right]$.

2) Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y) dy \quad ,$$

où g et k sont des fonctions connues ainsi que leurs transformées de *Fourier* respectives $\hat{g}$ et $\hat{k}$.

Exercice 5

On rappelle qu'une distribution $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ est dite homogène de degré $\lambda \in \mathbb{R}$ si

$$\langle f \ , \ \varphi_t \rangle = t^{-(n+\lambda)} \langle f \ , \ \varphi \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \ , \ \forall t > 0 \quad (\text{où } \varphi_t(x) = \varphi(tx)).$$

Montrer que la transformée de *Fourier* d'une distribution tempérée homogène de degré λ est homogène de degré $-n - \lambda$.

Exercice 6

Une distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est dite paire (resp. impaire) si

$$\langle f \ , \ \check{\varphi} \rangle = \langle f \ , \ \varphi \rangle \quad (\ resp. \ - \langle f \ , \ \varphi \rangle \ ) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ où } \check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Montrer que si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est paire (resp. impaire) alors sa transformée de *Fourier* est paire (resp. impaire).

Exercice 7

1) Calculer la transformée de *Fourier* de la distribution $f = VP(\frac{1}{x})$ et en déduire la transformée de *Fourier* de la distribution $H(x)$, $i.e$ $\mathcal{F}\ H(x)$, et sa transformée de *Fourier* inverse, $\mathcal{F}^{-1}H(x)$, où $H(x)$ est la fonction de *Heaviside* :

$$H(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x > 0 \\ \\ 0 \quad si \quad x < 0 \end{cases} .$$

2) En utilisant l'identité

$$|x| = xH(x) - xH(-x) .$$

Calculer la transformée de *Fourier* de $|x|$, $i.e$ $\mathcal{F}\,|x|$ et en déduire $\mathcal{F}\left(Pf\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 8

Soit la fonction signe sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{Si}\,gn\ (x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x > 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \\ -1 \quad si \quad x < 0 \end{cases} .$$

Montrer que :

$$(i) \quad \frac{d}{dx}\mathrm{Si}\,gn\ (x) = 2\delta \quad ;$$
$$(ii)\ \mathcal{F}(\mathrm{Si}\,gn\ (x)\ ) = -2i\ VP(\frac{1}{x}).$$