Série d'exercices N° 05

Exercice 01 :

Montrer que la fonction sigmoïde satisfait la propriété suivante :

$$\mathbf{sigm}(-\mathbf{a}) = \mathbf{1} - \mathbf{sigm}(\mathbf{a})$$

et que son inverse est donné par

$$\mathbf{sigm}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{ln}\{\boldsymbol{y}/(\mathbf{1}-\boldsymbol{y})\}$$

Exercice 02 :

Soit la fonction sigmoïde définie par :

$$\sigma(a) = \frac{1}{1+\exp(-a)}$$

Vérifier que la relation pour la dérivée de la fonction sigmoïde définie par :

$$\frac{d\sigma}{da} = \sigma(1-\sigma)$$

Exercice 03:

Pour un ensemble $\{\phi_n, t_n\}$, où $t_n \in \{0,1\}$ et $\phi_n = \phi(\mathrm{x}_n)$, avec $n = 1, \ldots, N$, la fonction de vraisemblance peut écrite sous la forme :

$$p(\mathbf{t}|\boldsymbol{w}) = \prod_{n=1}^{N} y_n^{t_n}\{1-y_n\}^{1-t_n}$$

avec $t = (t_1, .., t_N)^T$ et $y_n = p(C_1|\phi_n)$. On peut définir une fonction d'erreur par prendre le logarithm negative de la fonction de vraisemblence, qui va donner la fonction d'erreur (cross entropy) de la forme :

$$E(\boldsymbol{w}) = -\ln p(\mathbf{t}|\boldsymbol{w}) = -\sum_{n=1}^{N}\{t_n \ln y_n + (1-t_n)\ln(1-y_n)\}$$

En utilisant le résultat de l'exercice 02 pour la dérivée du sigmoïde logistique, montrer que la dérivée de la fonction d'erreur pour le modèle de régression logistique est donnée par

$$\nabla E(\boldsymbol{w}) = \sum_{n=1}^{N}(1-t_n)\phi_n$$

Avec $y_n = \sigma(a_n)$ et $a_n = w^T\phi_n$