Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et Technologie
Département des Maths et Informatique

$1^{ère}$ Année Master
Mathématiques Appliquées
Théorie Spectrale des opérateurs

Série de T.D N° 1

Exercice 01 :

Soit $p \in [1\ ;\ +\infty[$. Faisons de $\mathbb{R}^n$ un espace noté $\ell_p^{(n)}$ et définissons sur cet espace deux applications :

$$\begin{aligned}
\|.\|_p \ :\ \ell_p^{(n)} &\to \mathbb{R}^+ \\
x \mapsto \|x\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \\
\|.\|_c \ :\ \ell_p^{(n)} &\to \mathbb{R}^+ \\
x \mapsto \|x\|_c &= \max_{1\le k\le n} |x_k|
\end{aligned}$$

où les $\{x_k\}_1^n$ sont les coordonnées de $x \in \mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $\|.\|_p$ et $\|.\|_c$ sont des normes sur $\ell_p^{(n)}$ (i.e sur $\mathbb{R}^n$).

2) Démontrer la double inégalité

$$\|x\|_c \le \|x\|_p \le n^{1/p}\,\|x\|_c \quad .$$

Exercice 02 :

a) Soient $p > 1$, $q > 1$ deux exposants conjugués i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et considérons la fonction

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} - t + \frac{1}{q} \quad , \quad \forall t \in [0\ ,\ +\infty[\quad .$$

Montrer que la fonction φ admet un minimum sur $[0\ ,\ +\infty[$ en un seul point $t = 1$ et en déduire que

$$(i) \qquad t \le \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} \ ,\quad \forall t \in [0\ ,\ +\infty[\quad ;$$

$$(ii) \quad \text{pour} \quad u \ge 0 \ ,\ v \ge 0 \quad \text{on a} \ :\ uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \ .$$

b) Montrer que pour des nombres complexes quelconques $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$, $\eta_1,\ \eta_2,\ ...\eta_n$ on a :

1- L'inégalité de *Hölder*

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad ;$$

2- L'inégalité de *Minkowski*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad .$$

Exercice 03 :

Soit $\mathbf{H}$ un espace préhilbertien. La suite $\{e_k\}$ de vecteurs de $\mathbf{H}$ constitue un système orthonormal si quels que soient les indices $k,\ k'$, on a :

$$(e_k \mid e_{k'}) = \delta_{kk'} \qquad (\text{où} \quad \delta_{kk'} \text{ est le symbole de Kronecker}).$$

Pour tout $x \in \mathbf{H}$ on appelle $k - i\grave{e}me$ coefficient de Fourier de x par rapport au système $\{e_k\}$ le nombre

$$c_k = (e_k \mid x)$$

et la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

s'appelle série de Fourier de x suivant le système (e_k) .

Montrer que si $\mathbf{H}_n$ est le sous-espace de $\mathbf{H}$, de dimension n, engendré par les n premiers vecteurs $e_1,\ e_2,\ ...e_n$ du système orthonormal (e_k), alors

$$d_n = \inf_{y \in H_n} \|x - y\| \quad ,\ x \in H.$$

se définit par les deux égalités

$$d_n = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| \qquad (1)$$

$$d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \qquad (2)$$

En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{inégalité de } Bessel)\ .$$

Exercice 04 :

Montrer que les fonctonnelles suivantes dans $C\,[-1, 1]$ sont linéaires continues et chercher leurs normes :

$a)\quad \langle f\ /\ x \rangle = \frac{1}{2}\,[x(-1) + x(1)]$; $\qquad b)\quad \langle f\ /\ x \rangle = \frac{1}{3}\,[x(-1) + x(1)]$;

$c)\quad \langle f\ /\ x \rangle = 2\,[x(1) - x(0)]$; $\qquad d)\quad \langle x\ /\ f \rangle = 2\,[x(-1) - x(0)]$.

Exercice 05 :

Soit, pour $\alpha \geq 0$ donné, un espace de Banach C_α de fonctions $x(t)$ continues sur $[0, \infty[$ telles que

$$\sup_{[0,\infty[} \left[e^{\alpha t}\,|x\,(t)|\right] < +\infty$$

de norme

$$\|x\|_\alpha = \sup_{[0,\infty[} \left[e^{\alpha t}\,|x\,(t)|\right]\ .$$

Montrer que l'opérateur intégral A , donné par :

$$Ax\,(t) = \int_0^t e^{-\beta(t-s)} x\,(s)\,ds$$

est, pour $\beta > \alpha \geq \gamma$, un opérateur linéaire continu agissant de C_α dans C_γ , et que

$$\|A\| = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & si \quad \gamma = \alpha \\ \left[\dfrac{(\alpha-\gamma)^{\alpha-\gamma}}{(\beta-\gamma)^{\beta-\gamma}}\right]^{\dfrac{1}{\beta-\alpha}} & si \quad \gamma < \alpha \end{cases} .$$

<u>Exercice 06</u> :

Soient $\mathbf{X},\ \mathbf{Y}$ deux espaces vectoriels normés et soit $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Montrer que toute fonctionnelle linéaire bornée h définie partout sur $\mathbf{Z}$ se laisse mettre d'une façon et d'une seule sous la forme :

$$\langle h \ / \ (x,y) \rangle = \langle f \ / \ x \rangle + \langle g \ / \ y \rangle$$

où $f \in \mathbf{X}^*$ et $g \in \mathbf{Y}^*$.

<u>Exercice 07</u> :

Soit ℓ_p , $p > 1$, l'espace de Banach des suites réelles $x = \{x_n\}_n$ telle que $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|^p < +\infty$, muni de la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\geq 1} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Montrer que le dual de ℓ_p, ℓ_p^*, est ℓ_q où q est l'exposant conjugué de p , $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; i.e que toute fonctionnelle linéaire continue f de ℓ_p se développe pour $p > 1$ en

$$\langle f \ /x \rangle = \sum_{n\geq 1} x_n y_n \quad ,$$

où $x = \{x_n\}_n \in \ell_p$ et $y = \{y_n\}_n \in \ell_q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, et $\|f\| = \|y\|_q$.

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et Technologie
Département des Maths et Informatique

$1^{ère}$ Année Master
Mathématiques Appliquées
Théorie Spectrale des opérateurs

Série de T.D N° 2

Exercice 01 :

Soit $\mathbf{X}$ un espace de Banach.

a) Montrer qu'on a dans $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ les fonctions d'opérateurs suivantes :

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad , \quad \cos(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!} \quad , \quad \sin(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad ,$$

$$\cosh(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{2k}}{(2k)!} \quad , \quad \sinh(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad .$$

b) Montrer que :

$$\exp(\mathbf{A}) = \cosh(\mathbf{A}) + \sinh(\mathbf{A}) \;\; ; \quad \|\exp(\mathbf{A})\| = \exp(\|\mathbf{A}\|) \quad ; \; \|\sinh(\mathbf{A})\| \leq \sinh(\|\mathbf{A}\|) \;\; ;$$

$$\|\cosh(\mathbf{A})\| \leq \cosh(\|\mathbf{A}\|) \;\; ; \;\; \|\sin(\mathbf{A})\| \leq \sinh(\|\mathbf{A}\|) \;\; ; \;\; \|\cos(\mathbf{A})\| \leq \cosh(\|\mathbf{A}\|) \;\; .$$

Exercice 02 :

Soient $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$ trois espaces vectoriels normés supposons que $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$ sont des espaces de Banach.

a) Soient $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$, $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})$, montrer que

$$\|\mathbf{BA}\| \leq \|\mathbf{B}\|\, \|\mathbf{A}\|$$

b) Soient $\{\mathbf{A}_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$, $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{Y})$, $\{\mathbf{B}_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})$, $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}\ ,\ \mathbf{Z})$.
Montrer que

$$\text{si } \; \mathbf{A}_n \to \mathbf{A} \; \text{ et } \; \mathbf{B}_n \to \mathbf{B} \; , \text{ lorsque } \; n \to +\infty \qquad \text{alors } \quad \mathbf{B}_n\mathbf{A}_n \to \mathbf{BA} \quad \text{quand } \; n \to +\infty \; .$$

Exercice 03 :

Soit $\mathbf{X}$ un espace de Banach et soit $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ tel que $\|\mathbf{A}\| < 1$.

a) Montrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$ est convergente.

b) Si on note par $\mathbf{S}$ la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$. Montrer que l'opérateur $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ est continûment inversible et que

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad ; \quad \left\|(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}\|} \quad \text{et} \quad \left\|I - (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\| \leq \frac{\|\mathbf{A}\|}{1 - \|\mathbf{A}\|}.$$

Exercice 04 :

Soit un opérateur $\mathbf{A}: \ C[0,1] \to C[0,1]$ tel que

$$\mathbf{A}x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \ + \ x(t) \ .$$

défini sur

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) = \Big\{x(t) \in C^2[0,1] \quad ; \quad x(0) = x^{'}(0) = 0\Big\}$$

a) Montrer que $\mathbf{A}$ est un opérateur linéaire non-borné.

b) Montrer que $\mathbf{A}$ est continûment inversible et chercher $\mathbf{A}^{-1}$.

Exercice 05 :

Soit l'opérateur $\mathbf{A}: \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ tel que

$$\mathbf{A}x(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$$

a) Montrer que $\ker(\mathbf{A}) = \{0\}$ ie que l'équation $\mathbf{A}x = y$ admet au plus une solution.

b) Montrer que $\mathbf{A}$ est continûment inversible et chercher $\mathbf{A}^{-1}$.

(On rappelle qu'un opérateur $\mathbf{A}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ est continûment inversible si et seulement si $\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathbf{Y}$, l'opérateur $\mathbf{A}$ est inversible et $\mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$).

Exercice 06 :

Soient dans $C^1[0,1]$ le sous-espace

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) = \big\{x(t) \in C^1[0,1] \ , \ x(0) = 0\big\} \quad ,$$

et un opérateur $\mathbf{A} \ : \ \mathbf{D}(\mathbf{A}) \subset C^1[0,1] \to C \ [0,1]$ tel que

$$\mathbf{A}x(t) = \frac{dx(t)}{dt} + a(t)x(t) \quad , \ a(t) \in C \ [0,1] \ .$$

Montrer que $\mathbf{A}$ est continûment inversible et déterminer son inverse.

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et Technologie
Département des Maths et Informatique

$1^{ère}$ Année Master
Mathématiques Appliquées
Théorie Spectrale des opérateurs

Série de T.D N° 3

Exercice 01 :

Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert. Montrer les propriétés suivantes :

a) Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors $(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})^* = \bar{\alpha}\mathbf{A}^* + \bar{\beta}\mathbf{B}^*$;

b) Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ alors $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$;

c) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ alors $\mathbf{A}^{**} = \mathbf{A}$;

d) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ et si $\mathbf{A}$ est continûment inversible alors $\mathbf{A}^*$ l'est aussi et que $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$.

Exercice 02 :

Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert et soit $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ un opérateur auto-adjoint, on dit que $\mathbf{A}$ est positif, et on écrit $\mathbf{A} \geq 0$, si $(\mathbf{A}x, x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{H}$.

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ sont deux opérateurs auto-adjoints, on dit que $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ si $\mathbf{A} - \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$.

Montrer que si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ et $\mathbf{C} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ sont trois opérateurs auto-adjoints alors :

a) si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \geq \mathbf{C}$ alors $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$;

b) si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \geq \mathbf{A}$ alors $\mathbf{A} = \mathbf{B}$;

c) si $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ alors $\alpha\mathbf{A} \geq \alpha\mathbf{B}$ pour $\alpha \geq 0$,
et $\alpha\mathbf{A} \leq \alpha\mathbf{B}$ pour $\alpha \leq 0$.

Exercice 03 :

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ un opérateur continûment inversible, où $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont deux espaces de Banach. Montrer que $\mathbf{A}^*$, l'adjoint de $\mathbf{A}$, est continûment inversible et que

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^* \ .$$

Exercice 04 :

Soit $\mathbf{X} = L^2[a\ ,\ b]$ l'espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(x \mid y) = \int_a^b \overline{x(s)}y(s)ds\ , \quad \forall x,\ y \in L^2[a\ ,\ b]\,.$$

Considérons l'opérateur $\mathbf{K}$ défini de X dans X par

$$\mathbf{K}x(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

où $k(t,s) \in C[a\ ,\ b] \times [a\ ,\ b]$.

1) Montrer que $\mathbf{K}$ est un opérateur linéaire continu de $\mathbf{X}$ dans $\mathbf{X}$ i.e $\mathbf{K} \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$.

2) Trouver $\mathbf{K}^*$ l'adjoint de l'opérateur $\mathbf{K}$.

3) Donner une condition sur $k(t,s)$ pour que $\mathbf{K}$ soit un opérateur auto-adjoint.

Exercice 05 :

a) Soient $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert et $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Montrer que si $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ est un opérateur compact alors $\mathbf{A}$ est compact.

b) En utilisant a) montrer que si $\mathbf{A}$ est un opérateur compact alors $\mathbf{A}^*$ est compact.

Exercice 06 :

Considérons dans ℓ_2 , l'espace de Banach des suites réelles $\xi = (\xi_k)$ telle que $\sum\limits_{k\geq 1} |\xi_k|^2 < +\infty$, muni de la norme

$$\|\xi\|_2 = \left(\sum_{k\geq 1} |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

l'opérateur A défini par

$$\mathbf{A}(\xi_k) = (\eta_k), \quad \text{où} \quad \eta_k = \sum_{l\geq 1} a_{k\ l}\ \xi_l\ , \quad k = 1, 2, ...$$

et les $(a_{k\ l})$ vérifient $\sum\limits_{k\geq 1}\sum\limits_{l\geq 1} |a_{k\ l}|^2 < +\infty$ (un tel opérateur s'appelle opérateur matriciel d'*Hilbert−Schmidt*).

Montrer que $\mathbf{A}$ est un opérateur compact de ℓ_2 i.e $\mathbf{A} \in \boldsymbol{K}(\ell_2)$.

Exercice 07 :

Soit $\mathbf{X}$ l'espace $C[a\ ,\ b]$. Considérons l'opérateur linéaire intégral défini par

$$\mathbf{K} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$$

$$x(t) \mapsto y(t) = \mathbf{K}x(t)$$

où

$$\mathbf{K}x(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

$k(t,s)$ est une fonction continue sur $[a\ ,\ b] \times [a\ ,\ b]$ ($k(t,s)$ s'appelle le noyau de l'opérateur intégral $\mathbf{K}$).

Montrer que $\mathbf{K} \in \boldsymbol{K}(X)$ i.e $\mathbf{K}$ est un opérateur compact sur $\mathbf{X}$.