CH II Opérateurs linéaires bornés

Soient X, Y deux espaces vectoriels normés.

Définition II-01 :
Un opérateur linéaire A, défini partout dans X à valeurs dans Y, est une application linéaire de X dans Y.

On sait d'après ce qu'on a vu au paragraphe 3 du chapitre I (chapitre précédent) que l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de X dans Y, noté $\mathcal{L}(X, Y)$, est un espace vectoriel normé muni de la norme

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad , \forall A \in \mathcal{L}(X, Y).$$

et qu'il y a identité entre les opérateurs linéaires continus et les opérateurs bornés on sait aussi que si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est un Banach.

II - 1 Convergence uniforme d'opérateurs linéaires

Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs linéaires et bornés $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$

Définition II-02 :
On dit que $A_n \to A \in \mathcal{L}(X, Y)$ uniformément pour $n \to +\infty$ si $\|A_n - A\| \to 0$ pour $n \to +\infty$

Remarque 01 :
La convergence uniforme d'une suite d'opérateurs linéaires continus n'est autre que sa convergence au sens de la norme de $\mathcal{L}(X, Y)$

Théorème II-11 :

Pour que $A_n \to A$ uniformément pour $n \to +\infty$ $(A_n, A \in \mathcal{L}(X,Y))$, il faut et il suffit que $A_n x \to Ax$ uniformément par rapport à x dans la boule $\|x\| \leq 1$ pour $n \to +\infty$

Preuve :

La condition est nécessaire, on le voit directement de l'inégalité :

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \|x\|$$
$$\leq \|A_n - A\| \quad , \forall x, \|x\| \leq 1$$

donc si $\|A_n - A\| \to 0$ pour $n \to +\infty$

alors $\|A_n x - Ax\| \to 0$ uniformément pour $\|x\| \leq 1$ $n \to +\infty$

La condition est suffisante. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N \Rightarrow \|A_n x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x, \|x\| \leq 1$

d'où $\sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - Ax\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, n > N$:

$$\|A_n - A\| < \varepsilon$$

ce qui signifie que $A_n \to A$ unif pour $n \to +\infty$.

<u>Corollaire II-01</u> :

Supposons que $A_n \to A$ uniformément pour $n \to +\infty$ et soit M une partie bornée quelconque de X. Alors $A_n x \to Ax$ uniformément par rapport à $x \in M$ pour $n \to +\infty$

<u>Preuve</u> :

Puisque M est une partie bornée, il existe une boule $B(0, R) \supset M$. On a alors

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \|x\| \leq R \|A_n - A\| \to 0$$

II - 2 Les séries dans $\mathcal{L}(X, Y)$.

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés

Définition II-03 :

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$, $A_k \in \mathcal{L}(X, Y)$, est uniformément convergente si la suite de ses sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ est uniformément convergente.

Définition II-04 :

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ est absolument convergente si la série numérique $\sum_{k=1}^{+\infty} \|A_k\|$ est convergente (on dit aussi qu'elle est normalement convergente).

Remarque 02 :

On définit sans difficulté les critères de convergence uniforme et absolue (Cauchy) d'une série dans $\mathcal{L}(X, Y)$ pour le cas où $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace de Banach.

Théorème II-12 :

Soit $\mathcal{L}(X, Y)$ un espace de Banach. Si la série $\sum_{k=1}^{+\infty} A_k$ est absolument convergente, elle est aussi uniformément convergente.

Preuve :

$$\| S_{n+p} - S_n \| = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \| A_k \|$$

il ne reste qu'à appliquer les critères de Cauchy : d'abord le critère de la convergence absolue, ensuite celui de la convergence uniforme.

II-3 Convergence forte dans $\mathcal{L}(X, Y)$.

En plus de la convergence uniforme d'opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{L}(X, Y)$, il existe un autre type de convergence qu'on rencontre tout aussi fréquemment dans les applications.

Définition II-05 :

Soit une suite $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X; Y)$. On dit que cette suite converge fortement vers un élément $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ si pour tout $x \in X$

$$\|A_n x - Ax\| \to 0, \quad n \to +\infty$$

Remarque 03 :

Notons que si pour $n \to +\infty$ la suite $\{A_n\}$ converge vers A uniformément, i.e au sens de la norme de $\mathcal{L}(X, Y)$, on a $A_n \to A$ fortement pour $n \to +\infty$. En effet, cela ressort immédiatement de la majoration

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \, \|x\|$$

II-4 Principe de la borne uniforme :

Lemme 01 :

Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$; supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ et une boule fermée $\overline{B}(x_0, R)$ telle que $\|A_n x\| \leq \alpha$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, R)$ (ie. que la suite $\{A_n x\}$ est uniformément bornée sur $\overline{B}(x_0, R)$). Alors la suite

suite $\{\|A_n\|\}$ est bornée.

Preuve:

Soit $x \in X$, $x \neq 0$; alors l'élément

$x_0 + \frac{x}{\|x\|} R \in \bar{B}(x_0, R)$. par conséquent

$$\alpha \geq \left\| A_n\left(x_0 + \frac{x}{\|x\|}R\right)\right\| = \left\| \frac{R}{\|x\|} A_n x + A_n x_0 \right\| \geq \frac{R}{\|x\|} \|A_n x\| - \alpha$$

D'où $\|A_n x\| \leq \frac{2\alpha}{R} \|x\|$ et donc

$\|A_n\| \leq \frac{2\alpha}{R}$. Le lemme est démontré.

Théorème II-03: (Principe de la borne uniforme)
Soit X un espace de Banach. Si la suite $\{A_n x\}$ est bornée pour tout x donné, $x \in X$, alors la suite $\{\|A_n\|\}$ est bornée.

Théorème II-04: (Banach-Steinhaus)
Soit $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, où X est un espace de Banach. Pour que $A_n \to A \in \mathcal{L}(X, Y)$ fortement pour $n \to +\infty$, il faut et il suffit que:

1) $\{\|A_n\|\}$ soit bornée

2) $A_n \to A$ fortement pour $n \to +\infty$ sur un sous-espace X' dense dans X.

<u>Preuve</u>:

La condition est nécessaire. D'après $A_n x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Ax$ pour, $x \in X$, il ressort que $\|A_n x\| \to \|Ax\|$ pour $n \to +\infty$, si bien que la suite $\{\|A_n x\|\}$ est bornée. En vertu du principe de la borne uniforme (théorème précédent), la suite $\{\|A_n\|\}$ est bornée. Puisque $X' \subset X$ donc 2) est vérifiée.

Montrons que la condition est suffisante. Soit $x \in X$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in X'$ tq $\|x - x'\| < \varepsilon$ soit $\alpha = \sup_{n \geq 0} \|A_n\|$, $A_0 = A$. Montrons que $A_n \to A$ fortement pour $n \to +\infty$:

$$\|A_n x - Ax\| = \|A_n(x-x') + (A_n x' - Ax') + A(x'-x)\|$$

$$\leq \|A_n\|\,\|x-x'\| + \|A_n x' - Ax'\| + \|A\|\,\|x'-x\|$$

$$\leq 2\alpha\varepsilon + \|A_n x' - Ax'\|$$

Utilisons le fait que $\{A_n x'\}$ converge vers Ax'. Cherchons $N>0$ tel que pour tout $n>N$ il y ait $\|A_n x' - Ax'\| < \varepsilon$. On a alors pour tout $n>N$

$$\|A_n x - Ax\| < (2\alpha+1)\varepsilon$$

i.e que la condition est bien suffisante.

II- 5 Opérateurs inverses :

Soit un opérateur linéaire $A : X \to Y$, défini sur $D(A) \subseteq X$, à valeurs dans $Im(A) \subseteq Y$, où X, Y sont deux espaces vectoriels. Introduisons l'ensemble $Ker A = \{x \in D(A) ;\ Ax = 0\}$ appelé noyau de A ou ensemble des zéros de A.

Remarque 04 :

Remarquons que $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel non vide, car $0 \in \ker(A)$.

Théorème II-05 :

L'opérateur linéaire A met en bijection $D(A)$ et $Im(A)$ si et seulement si $\ker A = \{0\}$.

Preuve :

Soit $\ker A = \{0\}$. Supposons qu'il existe néanmoins un $y \in Im(A)$ qui admet deux antécédents $x_1, x_2 \in D(A)$, mais

$$A x_1 = y, \quad A x_2 = y \quad \text{donc} \quad A(x_1 - x_2) = 0$$

cela revient à dire que $x_1 - x_2 \in \ker A = \{0\}$ donc $x_1 = x_2$. La contradiction obtenue prouve que A est bijectif.

Supposons que A est bijectif donc si $x \in \ker A$ alors $Ax = 0$ mais on sait que $A0 = 0$ et puisque A est injectif donc $x = 0$.

Remarque 05 :

Il est facile de voir que si A opérateur linéaire qui réalise une bijection de $D(A)$ sur $Im(A)$ alors A^{-1} l'opérateur inverse de A, qui est lui aussi une bijection de $Im(A)$ sur $D(A)$, est linéaire.

Soient X, Y deux espaces normés

Théorème II-06 :

L'opérateur A^{-1} existe et en même temps est borné sur $Im(A)$ si et seulement si pour tout $x \in D(A)$ et une constante $\alpha > 0$

$$\|Ax\| \geq \alpha \|x\| \qquad (*)$$

Preuve :

La condition est nécessaire. Supposons que A^{-1} existe et soit borné sur $D(A^{-1}) = Im(A)$. Autrement dit, il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $y \in Im(A)$ on a

$$\|A^{-1}y\| \leq \beta \|y\|.$$

Prenons $y = Ax$, on trouve $(*)$.

La condition est suffisante. Si l'inégalité $(*)$ est vérifiée, on a $x = 0$ chaque fois que $Ax = 0$, on a donc $Ker(A) = \{0\}$. Alors A^{-1} existe et réalise une bijection de $Im(A)$ sur $D(A)$.

Posons $x = A^{-1}y$ dans $(*)$, on obtient

$$\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y\|, \quad \forall y \in Im(A)$$

i.e que A^{-1} est borné sur $Im(A)$.

<u>Définition II-06:</u>

On dit qu'un opérateur linéaire $A: X \to Y$ est continûment inversible si $Im(A) = Y$, l'opérateur A est inversible et $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

<u>Théorème II-07:</u>

L'opérateur A est continûment inversible si et seulement si $Im(A) = Y$ et l'inégalité $(*)$ est vérifiée pour tout $x \in D(A)$ et une constante $\alpha > 0$.

si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un opérateur partout défini et borné, il vérifie le théorème de l'opérateur inverse de Banach.

<u>Théorème II-08</u> : (Théorème de l'opérateur inverse de Banach)

Si A est un opérateur linéaire borné qui réalise une application bijective d'un espace de Banach X sur un autre espace de Banach Y, son inverse A^{-1} est borné.

<u>Définition II-07</u> :

Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. On dit que $U \in \mathcal{L}(Y, X)$ est l'opérateur inverse à droite de A si

$$AU = Id_Y .$$

<u>Définition II-08</u> :

Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. On dit que $V \in \mathcal{L}(Y, X)$ est l'opérateur inverse à gauche de A si

$$VA = Id_X .$$

Dans la suite, l'opérateur inverse à droite de A sera noté A_d^{-1} et l'opérateur inverse à gauche A_g^{-1}.

Remarque 06 :

Il serait intéressant de considérer ces définitions au point de vue de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation

$$Ax = y \qquad (**)$$

Lemme 02 :

Si A admet son inverse à droite A_d^{-1}, l'équation $(**)$ a comme solution

$$x = A_d^{-1} y .$$

Si A admet son inverse à gauche A_g^{-1}, l'équation $(**)$ a une solution tout au plus.

Remarque 07 :

Dans le premier cas on dit que l'équation $(**)$ vérifie le théorème d'existence, et dans le second, qu'elle vérifie le théorème d'unicité.

Preuve du lemme :

on a :

$$A(A_d^{-1}y) = (AA_d^{-1})y = y.$$

i.e. que $x = A_d^{-1}y$ rend (**) identique et constitue donc une solution.

Supposons ensuite que A_g^{-1} existe. Considérons Ker(A). Soit $x \in Ker(A)$, alors $Ax = 0$ d'où par application à cette égalité A_g^{-1} il vient $A_g^{-1}Ax = 0$ i.e. $x = 0$ et donc $Ker(A) = \{0\}$ et par suite A est une injection, ce qui revient à dire que l'équation (**) vérifie le théorème d'unicité.

Remarque 08 :

Si A_d^{-1} existe, on a $Im(A) = Y$. Si A_g^{-1} existe, on a $N(A) = \{0\}$. Cette remarque constitue un énoncé équivalent du lemme.

Lemme 03 :

Supposons que l'opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ admet ses inverses A_d^{-1} et A_g^{-1}. Il existe alors l'inverse A^{-1} de A tel que

1) $A^{-1} = A_d^{-1} = A_g^{-1}$
2) $D(A^{-1}) = Y$, $Im(A^{-1}) = X$.
3) l'inverse à droite de A et l'inverse à gauche de A sont uniques.

Lemme 04 :

Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Supposons qu'il existe un opérateur $U \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que $UA = Id_X$, $AU = Id_Y$

Alors A est continûment inversible et
$$A^{-1} = U$$

Lemme 04 :

Soient $A_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $A_2 \in \mathcal{L}(Y, Z)$ deux opérateurs continûment inversibles. Alors l'opérateur $A_2A_1 \in \mathcal{L}(X, Z)$ est continûment inversible et $(A_2A_1)^{-1} = A_1^{-1}A_2^{-1}$.

II-6 Opérateurs adjoints et auto-adjoints :

Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Ecrivons l'expression

$$f(Ax) = \langle f, Ax \rangle, \text{ où } x \in X, f \in Y^*$$

Définissons maintenant une fonctionnelle φ telle que

$$\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle = \langle f, Ax \rangle. \quad (*)$$

Notons quelques propriétés de φ :

1) $D(\varphi) = X$
2) φ est linéaire (on peut le vérifier directement de $(*)$)
3) φ est bornée, car

$$|\varphi(x)| = |\langle f, Ax \rangle| \leq \|Ax\| \|f\| \leq \|A\| \|f\| \|x\|.$$

on a donc $\varphi \in X^*$. De cette façon, à toute $f \in Y^*$ correspond, d'après $(*)$, un élément $\varphi \in X^*$. Autrement dit, on a un opérateur linéaire continu $\varphi = A^* f$ c'est précisément l'opérateur A^* qu'on appelle opérateur adjoint de A et il est facile de voir que $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ tq

$$\|A^* f\| \leq \|A\| \|f\|$$

<u>Lemme 05</u>:

Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ alors $\|A^*\| = \|A\|$

<u>Preuve</u>:

D'après la propriété 3) on a :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| = \|\varphi\| \leq \|A\| \|f\|, \text{ i.e. } \|A^*\| \leq \|A\|$$

L'inégalité réciproque se démontre en utilisant un corollaire du théorème de Hahn-Banach.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (complexe)

Définition II-09 :

L'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit auto-adjoint (ou hermitien) si $A^* = A$.

Remarque 09 :

Conformément à cette définition, A est un opérateur auto-adjoint si pour deux éléments quelconques $x, y \in \mathcal{H}$, on a :

$$(Ax / y) = (x / Ay).$$

Remarque 10 :

D'après ce qui précède on sait donc que si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors l'adjoint de A noté A^* est défini par la relation

$$(Ax / y) = (x / A^* y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \quad (A)$$

Propriétés de l'opérateur adjoint

Proposition II-01 :

Soient A et B deux opérateurs de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors :

1) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;

2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

3) $(AB)^* = B^* A^*$;

4) $A^{**} = A$; 5) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. (si A^{-1} existe)

Preuve :

Ces propriétés se démontrent directement de la définition de l'opérateur adjoint, i.e par la relation (A).

Théorème II-09 :

Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{H}$, et soient α, β deux nombres réels ; alors $\alpha A + \beta B$ est un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$

Preuve :

En utilisant la relation (A) et le fait que A et B sont auto-adjoints on aura :

$$\left((\alpha A+\beta B)x/y\right) = (\alpha Ax+\beta Bx/y)$$
$$= \alpha(Ax/y) + \beta(Bx/y)$$
$$= \alpha(x/Ay) + \beta(x/By)$$

et puisque α et β sont réels on a :

$$\left((\alpha A+\beta B)x/y\right) = \left(x/(\alpha A+\beta B)y\right), \ \forall x,y \in \mathcal{H}.$$

Théorème II-10 :

Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{H}$. L'opérateur AB est auto-adjoint si et seulement si A et B permutent entre eux.

Preuve :

Elle découle de l'égalité

$$(ABx/y) = (Bx/Ay) = (x/BAy), \ \forall x,y \in \mathcal{H}.$$

Théorème II-11 :

Si A est un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$ alors le nombre (Ax/x) est réel pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Preuve :

Puisque

$$(Ax/x) = (x/Ax) = \overline{(Ax/x)}$$

i.e le nombre complexe (Ax/x) est égal à son conjugué complexe, ce qui veut dire qu'il est réel.

Théorème II-12 :

Si A est un opérateur auto-adjoint, on a :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax/x)|$$

Preuve:

Soit $$C_A = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax/x)|$$

donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

on a:

$$|(Ax/x)| \leq \|A\| \|x\|^2$$

donc

$$C_A = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax/x)| \leq \|A\|. \qquad (*)$$

Démontrons maintenant l'inégalité inverse

$\|A\| \leq C_A$ ce qui prouvera le théorème.

Remarquons d'abord que

$$|(Ax/x)| \leq C_A \|x\|^2 \ ; \ \forall x \in \mathcal{H}, \ x \neq 0 \qquad (**)$$

En effet si $\|x\| \leq 1$ on a:

$$|(Ax/x)| \leq C_A$$

si $x \neq 0$ alors $\left|\left(A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq C_A$.

ce qui donne $(**)$.

Considérons à présent les identités :

$$(A(x+y)/x+y) = (Ax/x) + (Ax/y) + (Ay/x) + (Ay/y)$$

$$= (Ax/x) + 2Re(Ax/y) + (Ay/y) \rightarrow ①$$

$$(A(x-y)/x-y) = (Ax/x) - 2Re(Ax/y) + (Ay/y) \rightarrow ②$$

où on a utilisé le fait que (A auto-adjoint)

$$(Ax/y) + (Ay/x) = (Ax/y) + (y/Ax)$$

$$= (Ax/y) + \overline{(Ax/y)} = 2Re(Ax/y)$$

donc de ① et ② on aura :

$$4Re(Ax/y) = (A(x+y)/x+y) - (A(x-y)/(x-y))$$

donc

$$4\,|Re(Ax/y)| \leq |(A(x+y)/x+y)| + |(A(x-y)/x-y)|$$

$$\leq C_A(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

$$\leq 2C_A(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Soient $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ alors

$$|Re(Ax/y)| \leq C_A \quad ③$$

Soit x, $\|x\| \leq 1$, tel que $Ax \neq 0$. Posons dans (3) $y = \dfrac{Ax}{\|Ax\|}$. Il vient alors

$$\|Ax\| = \frac{\|Ax\|^2}{\|Ax\|} = \frac{|(Ax/Ax)|}{\|Ax\|} \leq C_A \quad \text{i.e.} \quad \|Ax\| \leq C_A .$$

Il en est de même à fortiori si $Ax = 0$

d'où $\|A\| \leq C_A$. Compte tenu de (*)

on obtient $\|A\| = C_A = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |(Ax/x)|$.

II-7 opérateurs de projection orthogonale "projecteurs" :

On sait que d'après le théorème de la projection orthogonale que si V est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, à tout élément $x \in \mathcal{H}$ correspond un élément et un seul $y \in V$ qui représente la projection orthogonale de x sur V et que P_V l'opérateur de la projection orthogonale sur V est un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{H}$ qu'on appelle projecteur.

Du théorème de la projection orthogonale on déduit le résultat suivant.

Théorème II-13 :

Si P est le projecteur de $\mathcal{H}$ sur le sous-espace fermé V alors :

1) $x \in V$ si et seulement si $Px = x$.

2) si $V^{\perp}$ est l'orthogonal de V alors $I - P$ est le projecteur de $\mathcal{H}$ sur $V^{\perp}$.

3) $x \in V^{\perp}$ si et seulement si $Px = 0$.

Donnons aussi quelques propriétés principales des projecteurs :

Propriété 01 :

$P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, avec $\|P\| = 1$ pour $V \neq \{0\}$

en effet : d'après le théorème de Pythagore

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2$$

il s'ensuit que $\|Px\|^2 \leq \|x\|^2$ donc

$\|Px\| \leq \|x\|$ et $\|P\| \leq 1$.

si $V \neq \{0\}$ soit $x_0 \in V$, $\|x_0\| = 1$. on a alors

$1 = \|x_0\| = \|Px_0\| \leq \|P\|$ d'où $\|P\| = 1$.

Propriété 02 :

$P^2 = P$. En effet, prenons n'importe quel $x \in \mathcal{H}$; on a $Px \in V$ d'où $P(Px) = P^2x = Px$.

Propriété 03 :

P est auto-adjoint. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, donc $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$ tq $y_1, y_2 \in V$ et $z_1, z_2 \in V^\perp$ on a alors :

$$(Px_1 / x_2) = (y_1 / y_2 + z_2) = (y_1 / y_2) + (y_1 / z_2)$$

$$= (y_1 / y_2) = (y_1 + z_1 / y_2) = (x_1 / Px_2)$$

on a utilisé $(y, z) = 0$ pour $y \in V$ et $z \in V^{\perp}$.

Propriété 04 :

Pour tout $x \in \mathcal{H}$ on a $(Px / x) = \|Px\|^2$

d'où $(Px / x) \geq 0$.

En effet d'après les propriétés 2) et 3)

$$(Px/x) = (P^2 x / x) = (Px / Px) = \|Px\|^2.$$

Propriété 05 :

On a $x \in V$ si et seulement si $\|Px\| = \|x\|$.

cette propriété découle du théorème de Pythagore.

Propriétés 06 :

$(Px / x) \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathcal{H}$, L'égalité a lieu pour $Px = x$ (i.e $x \in V$) et dans ce cas seulement.

Preuve;

$$(Px/x) \leq \|Px\| \|x\| \leq \|P\| \|x\|^2 \leq \|x\|^2.$$

si $(Px/x) = (x/x)$ alors d'après la propriété 4 $\|Px\|^2 = \|x\|^2$ i.e. $\|Px\| = \|x\|$ d'où $x \in V$

Théorème II-14 :

Soit A un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H}$ tel que $A^2 = A$. Alors A est un projecteur sur un sous-espace V fermé de $\mathcal{H}$.

Preuve;

considérons l'ensemble

$$V = \{ x \in \mathcal{H} ; \; Ax = x \}$$

qui est un sous-espace de $\mathcal{H}$ et puisque A est continu alors V est fermé

Montrons que A est un projecteur sur V

Prenons $x \in H$ et écrivons-le sous la forme $x = Ax + (x - Ax)$

Montrons que $Ax \in V$ et que $x - Ax \in V^{\perp}$.

La première est évidente, car $A(Ax) = A^2x = Ax$

Ensuite on a pour tout $u \in V$

$$\begin{aligned}(x - Ax / u) &= (x / u) - (Ax / u) \\ &= (x / u) - (x / Au) = (x/u) - (x/u) \\ &= 0\end{aligned}$$

ie $x - Ax \in V^{\perp}$ et le théorème est démontré.

II - 8 Ensemble résolvant et spectre d'un opérateur linéaire:

Soit X un espace de Banach. Considérons un opérateur linéaire $A : X \to X$ défini sur un ensemble $D(A)$ dense dans X.

Considérons ensuite l'opérateur $(A - \lambda I)$, où λ est un nombre complexe.

Définition II-10 :

Le point λ s'appelle point régulier de A si l'opérateur $A - \lambda I$ est continûment inversible. L'ensemble des points réguliers de l'opérateur A s'appelle ensemble résolvant de A et se note $\rho(A)$. Si $\lambda \in \rho(A)$ l'opérateur $R(\lambda ; A) = (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ s'appelle résolvante de A.

Théorème II-15 :

L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est toujours ouvert.

Preuve :

Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$, cela revient à dire que l'opérateur $A - \lambda_0 I$ est continûment inversible. Considérons l'opérateur $A - \lambda I$ et remarquons qu'il vérifie

$$A - \lambda I = A - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0) I$$

$$= (A - \lambda_0 I)\left[I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0 ; A) \right] \qquad (1)$$

Puisque $A - \lambda_0 I$ est continûment inversible, l'opérateur $A - \lambda I$ est continûment inversible chaque fois que l'opérateur $I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0 ; A)$ l'est. Donc si $\quad (\|B\| < 1 , (I - B)^{-1} \in \mathcal{L}(X))$

$$|\lambda - \lambda_0| \, \| R(\lambda_0 ; A) \| < 1$$

l'opérateur $I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0 ; A)$ est continûment inversible i.e que $B(\lambda_0 , \frac{1}{\| R(\lambda_0 ; A) \|})$ est contenue dans $\rho(A)$; autrement dit, $\rho(A)$ est ouvert.

<u>Théorème II-16</u> :

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Alors

$$\{\lambda : |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A)$$

Preuve :

Remarquons que $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$

si donc $\|\lambda^{-1}A\| < 1$ ie $|\lambda| > \|A\|$

alors $A - \lambda I$ est continûment inversible.

Corollaire II-12 :

si A est borné alors $\rho(A)$ est non borné.

Définition II-11 :

Le complémentaire de $\rho(A)$ dans le plan complexe s'appelle spectre de A et se note $\sigma(A)$.

Définition II-12 :

$\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle valeur propre de l'opérateur A s'il existe un vecteur $x \neq 0$, $x \in D(A)$, tel que

$$Ax = \lambda x \qquad (*)$$

Le vecteur x dans $(*)$ s'appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Théorème II-17 :

Les vecteurs propres d'un opérateur linéaire associés à ses différentes valeurs propres forment une famille libre.

Remarque 11 :

D'après la définition II-11 du spectre de A on peut déduire de la Déf II-12 que toute valeur propre est une valeur spectrale.

Définition II-13 :

La fermeture de l'ensemble de toutes les valeurs propres qui est contenue dans $\sigma(A)$ s'appelle le spectre ponctuel de A et on le note $\sigma_p(A)$.

Définition II-14 :

L'ensemble de toutes les valeurs spectrales qui ne sont pas dans le spectre ponctuel s'appelle le spectre continu et se note $\sigma_c(A)$

Remarque 12 :

Des deux définitions précédentes on a :

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$$

Théorème II-18 :

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Il existe alors une limite finie

$$R_\sigma(A) = \lim_{n \to +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \qquad (*)$$

On a la relation

$$\inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = R_\sigma(A) \leq \|A\| \quad (**)$$

La limite $(*)$ s'appelle rayon spectral de A.

Preuve :

Posons $$R = \inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Par définition de la borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0$ il existe un m tel que

$$\|A^m\|^{\frac{1}{m}} \leq R + \varepsilon$$

Ensuite, tout entier n se laisse mettre d'une façon unique sous la forme

$$n = p_n m + q_n$$

avec p_n entier naturel et $0 \leq q_n \leq m-1$

Remarquons maintenant que

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \|A^{p_n m + q_n}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A^m\|^{\frac{p_n}{n}} \|A\|^{\frac{q_n}{n}}$$
$$\leq (R+\varepsilon)^{\frac{m p_n}{n}} \|A\|^{\frac{q_n}{n}}$$

Pour $n \to +\infty$ on a $\frac{p_n m}{n} = 1 - \frac{q_n}{n} \to 1$, $\frac{q_n}{n} \to 0$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} (R+\varepsilon)^{\frac{m p_n}{n}} \|A\|^{\frac{q_n}{n}} = R + \varepsilon$$

il existe alors un N tel que $\forall n > N$

$$(R+\varepsilon)^{m\frac{p_n}{n}} \|A\|^{\frac{q_n}{n}} < (R+\varepsilon)+\varepsilon = R+2\varepsilon.$$

on a donc la double inégalité

$$R \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < R+2\varepsilon$$

qui reste vraie pour tout $n > N$, cela démontre l'existence de la limite $(*)$ et l'égalité $R_\sigma(A) = R$ i.e la relation $(**)$.

Il ne reste qu'à remarquer que $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|$ ie $R_\sigma(A) \leq \|A\|$. Ce qui démontre le théorème.

__Théorème II-19 :__

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $R_\sigma(A) < 1$, l'opérateur $I-A$ est continûment inversible et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ absolument convergente. Si $R_\sigma(A) > 1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ est divergente.

Preuve:

Considérons la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} \|A^k\|$ alors d'après le théorème précédent, il existe $\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|} = R_\sigma(A)$. Alors d'après le critère de cauchy pour la convergence d'une série à termes positifs si $R_\sigma(A) < 1$ la série $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ est absolument convergente ie elle est convergente et par suite l'opérateur $(I - A)$ serait continûment inversible et on a $(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$. Soit $R_\sigma(A) > 1$. On a alors à partir d'un certain rang $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} > 1$ ie $\|A^k\| > 1$ et alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ est divergente, car son terme général ne tend pas vers zéro.

Corollaire II-13 :

Si pour un certain m on a $\|A^m\| < 1$ la série $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ est convergente.

Preuve :

En effet, $R_\sigma(A) = \inf_{k \geq 1} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \|A^m\|^{\frac{1}{m}} < 1$

Théorème II-20 :

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $|\lambda| > R_\sigma(A)$ alors on a

$\lambda \in \rho(A)$.

Preuve :

Considérons dans $\mathcal{L}(X)$ la série $-\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1} A^k$

alors si $|\lambda| > R_\sigma(A)$ on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \|\lambda^{-k-1} A^k\|^{\frac{1}{k}} = |\lambda|^{-1} \lim_{k \to +\infty} |\lambda^{-1}|^{\frac{1}{k}} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

$$= |\lambda|^{-1} R_\sigma(A) < 1$$

donc la série $-\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1} A^k$ est absolument convergente. Désignons par $S(\lambda)$ sa somme (pour $|\lambda| > R_\sigma(A)$) et par $S_n(\lambda)$ sa somme partielle d'ordre n. On peut facilement vérifier que

$$\mathcal{S}_n(\lambda)(A-\lambda I) = (A-\lambda I)\mathcal{S}_n(\lambda) = I - \lambda^{-n-1}A^{n+1}$$

par passage à la limite quand $n \to +\infty$ et pour $|\lambda| > R_\sigma(A)$ on obtient

$$\mathcal{S}(\lambda)(A-\lambda I) = (A-\lambda I)\mathcal{S}(\lambda) = I$$

ie que $A-\lambda I$ est continûment inversible donc $\lambda \in \rho(A)$ et de plus $\mathcal{S}(\lambda) = R(\lambda ; A)$.
Le théorème est démontré.