CHAPITRE 5

TRANSFORMATION DE $\mathscr{L}$APLACE

5.1 Définition et conditions d'existence

Notation.
On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Proposition 5.1.1

> Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $p_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\ \mathrm{e}^{-p_0 t} dt$ converge. Alors $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt} dt$ converge simplement pour tout p tel que $\mathscr{R}ep > x_0$

Preuve.
Posons $F(p) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tp} dt$. $F(p_0) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tp_0} dt$ est alors convergente.

Soient φ, ψ deux fonctions définies de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ par $\varphi(t) = f(t)\mathrm{e}^{-tp_0}$ et $\psi(u) = \displaystyle\int_0^u \varphi(t)dt$.

Alors on a :

a) φ est continue car f l'est
b) ψ est continue car elle est dérivable, $(\psi'(u) = \varphi(u))$
c) $\lim\limits_{u\to\infty} \psi(u) = F(p_0) \in \mathbb{C}$ ce qui implique que ψ est bornée

Posons $\sup\limits_{u\in\mathbb{R}^+} |\psi(u)| = M$ et soient $u > 0$ et $p = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $x > x_0$.

$$\int_0^u f(t)\mathrm{e}^{-tp} dt = \int_0^u f(t)\mathrm{e}^{-tp}\mathrm{e}^{-tp_0}\mathrm{e}^{tp_0} dt = \int_0^u f(t)\mathrm{e}^{tp_0}\mathrm{e}^{-(p-p_0)} dt = \int_0^u \varphi(t)\mathrm{e}^{-t(p-p_0)} dt.$$

Intégrons par parties :
$U = \mathrm{e}^{-t(p-p_0)} \Longrightarrow\ dU = -(p-p_0)\mathrm{e}^{-t(p-p_0)}$. $dV = \varphi(t)dt \Longrightarrow\ V = \psi$.

$$\int_0^u f(t)\mathrm{e}^{-tp} dt = \psi(t)\mathrm{e}^{-t(p-p_0)}\Big|_0^u + (p-p_0)\int_0^u \psi(t)\mathrm{e}^{-t(p-p_0)} dt =$$

$$= \psi(u)\mathrm{e}^{-u(p-p_0)} + (p-p_0)\int_0^u \psi(t)\mathrm{e}^{-t(p-p_0)} dt.$$

Etudions la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\infty} \psi(t)e^{-t(p-p_0)}dt$:

$$\left|\int_0^u \psi(t)e^{-t(p-p_0)}dt\right| \leq \int_0^u \left|\psi(t)e^{-t(p-p_0)}\right| dt \leq M \int_0^u e^{-t(x-x_0)}dt$$
$$= \frac{M(1-e^{-u(x-x_0)})}{x-x_0} \leq \frac{M}{x-x_0}.$$

D'autre part, la fonction $u \mapsto \displaystyle\int_0^u \left|\psi(t)e^{-t(p-p_0)}\right| dt$ est croissante dans $\mathbb{R}^+$. Il résulte que $\displaystyle\int_0^{\infty} \psi(t)e^{-t(p-p_0)}dt$ est absolument convergente. Comme $\displaystyle\lim_{u\to\infty} e^{-u(x-x_0)} = 0$ (car $x > x_0$), $\displaystyle\int_0^u f(t)e^{-tp}dt = \psi(u)e^{-u(x-x_0)} + (p-p_0)\int_0^u \psi(t)e^{-u(p-p_0)}dt$ admet une limite quand $u \to \infty$. $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-tp}dt$ est simplement convergente pour $x > x_0$.

Corollaire 5.1.1

S'il existe $p_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-tp_0}dt$ converge absolument alors $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-tp}dt$ converge normalement pour tout $p \in \overline{\Omega}_{x_0}$.

Preuve.
Soit $p = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $x \geq x_0$.
$|f(t)e^{-tp}| = |f(t)|e^{-tx} \leq |f(t)|e^{-tx_0} = |f(t)e^{-tp_0}|$

Définition 5.1.1
Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue.

1. On appelle transformée de $\mathscr{L}$aplace de f, la fonction $\mathscr{L}(f)$ définie par :
   $\mathscr{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-tp}dt.$
2. On appelle transformation de $\mathscr{L}$aplace, l'application $\mathscr{L} : C(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}) \mapsto \mathcal{F}(\mathbb{C})$ définie par $\mathscr{L}(f)$

On peut étendre cette définition aux cas des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

a) f est continue par morceaux, c'est-à-dire que sur chaque intervalle fini de la forme $[a, b], a < b$, les discontinuités de f (si elles existent) sont en nombre fini et sont de première espèce.

b) f est d'ordre exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$. La continuité intervient lorsqu'on parlera de la transformé inverse de $\mathscr{L}$aplace.

Sous ces conditions, il est facile de vérifier que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-tp}dt$ converge pour tout p vérifiant $\mathscr{R}e(p) > \alpha$ et on peut alors parler de transformée de $\mathscr{L}$aplace de f. Le problème est comment déterminer « le meilleur » $p \in \mathbb{C}$ pour que la transformée de $\mathscr{L}$aplace soit convergente. On admet le théorème suivant :

Théorème 5.1.1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue ;

1. Il existe un unique $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que

   $\mathscr{R}e(p) > a \Longrightarrow \displaystyle\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tp}dt$ converge simplement.

   $\mathscr{R}e(p) < a \Longrightarrow \displaystyle\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tp}dt$ diverge.

   a est appelé abscisse ce convergence simple.
2. Il existe un unique $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que

   $\mathscr{R}e(p) > b \Longrightarrow \displaystyle\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tp}dt$ converge absolument.

   $\mathscr{R}e(p) < b \Longrightarrow \displaystyle\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tp}dt$ ne converge pas absolument.

   b est appelé abscisse de convergence absolue.

Exemple 5.1.1

1) Soit la fonction constante $f(t) = a$ si $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ si $t < 0$.

$$\mathscr{L}(f)(p) = \int_0^\infty a\mathrm{e}^{-tp}dt = a\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tp}dt = -\frac{a}{p}\left[\mathrm{e}^{-tp}\Big|_0^\infty\right] = -\frac{a}{p}\left[\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{-ity}\Big|_0^\infty\right] = \frac{a}{p}$$

si $\mathscr{R}e(p) > 0$; car $|\mathrm{e}^{-ity}| = 1$ (bornée) et e^{-tx} ne converge à plus l'infini que si $x = \mathscr{R}e(p) > 0$.

2) $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$ pour $t \geq 0$ et $f(t) = 0$ si $t < 0$, $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$.

$$\mathscr{L}(f)(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-tp}dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(p-\alpha)}dt = \frac{-1}{p-\alpha}\left[\mathrm{e}^{-t(p-\alpha)}\Big|_0^\infty\right] = \frac{-1}{p-\alpha}\left[\mathrm{e}^{-t(x-a)}\mathrm{e}^{-it(y-b)}\Big|_0^\infty\right] = \frac{1}{p-\alpha}$$ si $\mathscr{R}e(p) = x > \mathscr{R}e(\alpha) = a$

5.2 Propriétés

5.2.1 Linéarité

Proposition 5.2.1

Soit $f, g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de $\mathscr{L}$aplace $\mathscr{L}(f)$ et $\mathscr{L}(g)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathscr{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathscr{L}(f) + \beta\mathscr{L}(g)$$

Preuve.
C'est immédiat.

Grâce à cette proposition on peut déterminer la transformée de la $\mathscr{L}$aplace des fonctions sinus et cosinus car $\cos\alpha t = \dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha t} + \mathrm{e}^{-i\alpha t}}{2}$ et $\sin\alpha t = \dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha t} - \mathrm{e}^{-i\alpha t}}{2i}$
.

Exercice.
Montrer que, en utilisant la proposition (5.2.1) et les exemples (5.1.1) qu'on a :

$$\mathscr{L}(\cos\omega t)(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \text{ si } \mathscr{R}e(p) > |\mathrm{Im}(\omega)|.$$
$$\mathscr{L}(\sin\omega t)(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \text{ si } \mathscr{R}e(p) > |\mathscr{I}m(\omega)|.$$

5.2.2 Transformée de $\mathscr{L}$aplace de la translation

Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de $\mathscr{L}$aplace $\mathscr{L}(f)(p)$. On considère la fonction f_α définie par $f_\alpha(t) = f(t-\alpha)\,;\ (\alpha > 0)$.

Proposition 5.2.2

$$\mathscr{L}(f_\alpha)(p) = \mathrm{e}^{-\alpha p}\mathscr{L}(f)(p)$$

Preuve.

Remarquons d'abord que $f_\alpha(t) = \begin{cases} f(t-\alpha) & si \quad t-\alpha \geq 0 \\ 0 & si \quad t-\alpha < 0 \end{cases}$

$\mathscr{L}(f_\alpha)(p) = \displaystyle\int_0^\infty f_\alpha(t)\mathrm{e}^{-tp}\,dt = \int_0^\infty f(t-\alpha)\mathrm{e}^{-tp}\,dt = \int_\alpha^\infty f(t-\alpha)\mathrm{e}^{-tp}\,dt.$

En posant $x = t-\alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f_\alpha)(p) &= \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-(\alpha+x)}\,dx = \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-\alpha p}\mathrm{e}^{-xp}\,dx \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha p}\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-xp}\,dx = \mathrm{e}^{-\alpha p}\mathscr{L}(f)(p)\end{aligned}$$

5.2.3 Transformée de $\mathscr{L}$aplace de l'homothétie

Soit $k > 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ et admettant une transformée de $\mathscr{L}$aplace $\mathscr{L}(f)$. Soit f_k la fonction définie par $f_k(t) = f(kt)$.

Proposition 5.2.3

$$\mathscr{L}(f_k)(p) = \frac{1}{k}\mathscr{L}(f)\left(\frac{p}{k}\right)$$

Preuve.

$\mathscr{L}(f_k)(p) = \displaystyle\int_0^\infty f_k(t)\mathrm{e}^{-tp}dt = \int_0^\infty f(kt)\mathrm{e}^{-tp}dt$. On fait le changement de variables : $y = kt$, donc $dt = \dfrac{dy}{k}$.

$$\mathscr{L}(f_k)(p) = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(y)\mathrm{e}^{-y\left(\frac{p}{k}\right)}dy = \frac{1}{k}\mathscr{L}(f)\left(\frac{p}{k}\right)$$

5.2.4 Transformée de $\mathscr{L}$aplace des dérivées

Proposition 5.2.4

Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ une fonction et $\sigma(f)$ son abscisse de convergence absolue.

On suppose :

i) $f \in C^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$.

ii) Il existe $M > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que pour tout entier $k \leq n$ on a $\left|f^{(k)}(t)\right| \leq$

Me^{at}

Alors

a) $\sigma(f^{(k)}) \leq a\,; \quad k = 0, 1, \ldots, n.$

b) $\mathscr{L}\left(f^{(n)}\right)(p) = p^n \mathscr{L}(f)(p) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(n-k)}(0)$

Preuve.
a) Soient $0 \leq k \leq n$, $p = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $\mathscr{R}e(p) = x > a$.
$|f^{(k)}(t)\mathrm{e}^{-tp}| = |f^{(k)}(t)\mathrm{e}^{-tx}| \leq |f^{(k)}(t)|\mathrm{e}^{-tx} \leq M\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-tx} = M\mathrm{e}^{-t(x-a)}$.
En outre, $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t(x-a)}dt$ converge si et seulement si $x - a > 0$ c'est-à-dire $x > a$. Donc si $\mathscr{R}e(p) > a$, l'intégrale est absolument convergente ce qui exprime que $\sigma(f^{(k)}) \leq a$.
b) La démonstration se fait par récurrence.
Pour $n = 1$.
$\mathscr{L}(f')(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-tp}dt$. On fait une intégration par parties avec $u = \mathrm{e}^{-tp}$ et $dv = f'(t)dt$.
$\mathscr{L}(f')(p) = \mathrm{e}^{-tp}f(t)\Big|_0^{\infty} + p\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-tp}dt = +p\mathscr{L}(f)(p) - f(0)$.
$\mathscr{L}(f'')(p) = \mathscr{L}((f')')(p) = p\mathscr{L}(f')(p) - f'(0) = p[p\mathscr{L}(f)(p) - f(0)] - f'(0) = p^2\mathscr{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)$.
Supposons que $\mathscr{L}\left(f^{(n)}\right)(p) = p^n\mathscr{L}(f)(p) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0)$.
$\mathscr{L}\left(f^{(n+1)}\right)(p) = \mathscr{L}\left((f')^{(n)}\right)(p) = p^n\mathscr{L}(f')(p) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}(f')^{(n-k)}(0) =$
$p^n\left(p\mathscr{L}(f)(p) - f(0)\right) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0) = p^{n+1}\mathscr{L}(f)(p) - p^n f'(0) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0) =$
$p^{n+1}\mathscr{L}(f)(p) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} p^{k-1}f^{(n+1-k)}(0)$

5.2.5 Transformée du produit de convolution

Proposition 5.2.5

Soient les fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant $f(t) = g(t) = 0$ si $t < 0$, alors :

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt$$

Preuve :
La définition du produit de convolution est :

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

et d'après les hypothèses les fonctions ne sont pas nulles que si $t > 0$ et $x - t > 0$, donc $0 < t < x$.

Soient les fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant $f(t) = g(t) = 0$ si $t < 0$. Notons $\mathscr{L}(f)$ et $\mathscr{L}(g)$ respectivement leur transformée de $\mathscr{L}$aplace.

Proposition 5.2.6

$$\mathscr{L}(f \star g)(p) = \mathscr{L}(f)(p)\mathscr{L}(g)(p)$$

Preuve.

Rappelons que $(f \star g)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du$.

Tenant compte du fait que $f(y) = g(y) = 0$ si $y < 0$, les calculs donnent :

$\mathscr{L}(f \star g)(p) = \displaystyle\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du\right]\mathrm{e}^{-tp}dt = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{t} f(t-u)g(u)du\right]\mathrm{e}^{-tp}dt =$
$\displaystyle\int_0^{\infty}\left[\int_u^{\infty} f(t-u)\mathrm{e}^{-tp}dt\right]g(u)du.$

Dans l'intégrale $\displaystyle\int_u^{\infty} f(t-u)\mathrm{e}^{-tp}dt$, on fait le changement de variables $v = t - u$.

$\displaystyle\int_u^{\infty} f(t-u)\mathrm{e}^{-tp}dt = \int_0^{\infty} f(v)\mathrm{e}^{-(u+v)p}dv = \mathrm{e}^{-up}\mathscr{L}(f)(p)$ (c'est la transformée de la translation voir proposition (5.2.2)). Finalement :

$\mathscr{L}(f \star g)(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{tp}\mathscr{L}(f)(p)g(u)du = \mathscr{L}(f)(p)\int_0^{\infty} g(u)\mathrm{e}^{-up}du = \mathscr{L}(f)(p)\mathscr{L}(g)(p)$

5.2.6 Transformée de $\mathscr{L}$aplace d'une primitive

Soit $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$ une primitive de f. On a alors $F' = f$ et $F(0) = 0$.

Proposition 5.2.7

$$\mathscr{L}(F)(p) = \frac{\mathscr{L}(f)(p)}{p}$$

Preuve.

D'après la proposition (5.2.4), $\mathscr{L}(F')(p) = p\mathscr{L}(F)(p) - F(0) = p\mathscr{L}(F)(p)$. De cette égalité on déduit $\mathscr{L}(F)(p) = \dfrac{\mathscr{L}(f)(p)}{p}$.

5.3 Transformée inverse de $\mathscr{L}$aplace

Étant donnée une fonction $F(p)$, est-il possible de trouver $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$ telle que $\mathscr{L}(f)(p) = F(p)$? Si f existe, est-elle unique ?

On a vu que la transformée de $\mathscr{L}$aplace de la fonction f est $\mathscr{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-tp}dt$.

La fonction $\mathscr{L}(f)(p)$ est appelée image de f et f est appelée originale de $\mathscr{L}(f)(p)$. Le théorème suivant, qu'on admet, répond à ces questions.

Théorème 5.3.1

Soit $E = \{f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}\}$ l'ensemble des fonctions vérifiant :

i) $\forall f \in E$, f est continue

ii) $\forall f \in E$, il existe $M > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

Si deux fonctions $f, g \in E$ admettent la même transformée de $\mathscr{L}$aplace $F(p)$, alors $f = g$

Remarque 5.3.1
Si $F(p) = \mathscr{L}(f)(p)$, on note $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)(t)$.
Soit $F(p) = \mathscr{L}(f)(p)$ et $G(p) = \mathscr{L}(g)(p)$.

Proposition 5.3.1

$$\mathscr{L}^{-1}(\alpha F + \beta G)(t) = \alpha \mathscr{L}^{-1}(F)(t) + \beta \mathscr{L}^{-1}(G)(t).$$

Preuve.
En effet, on sait que $\mathscr{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathscr{L}(f) + \beta \mathscr{L}(g)$. Vu l'unicité de l'originale $\mathscr{L}^{-1}(\alpha \mathscr{L}(f) + \beta \mathscr{L}(g)) = \alpha f + \beta g = \alpha \mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(f)) + \beta \mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(g))$. Ceci revient à dire que la transformation inverse de $\mathscr{L}$aplace est linéaire.

5.3.1 Formule de Heaviside

Cette formule permet de trouver l'originale d'une fraction rationnelle. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes tels que $d^0(P) < d^0(Q)$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les zéros de Q qu'on suppose simples. On suppose de plus que la fraction rationnelle $F(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ est irréductible. Cherchons l'originale de F.
En décomposant en éléments simples, on a :

$$F(p) = \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2}{p - \alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{p - \alpha_n}$$

Le calcul d'un cœfficient A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, est donné par la relation :

$$A_k = \lim_{p \to \alpha_k} (p - \alpha_k) F(p) = \lim_{p \to \alpha_k} \frac{P(p)}{Q(p)} (p - \alpha_k) = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

car $\displaystyle\lim_{p \to \alpha_k} \frac{p - \alpha_k}{Q(p)} = \lim_{p \to \alpha_k} \frac{p - \alpha_k}{Q(p) - Q(\alpha_k)} = \frac{1}{Q'(\alpha_k)}$.

D'où $F(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \frac{1}{p - \alpha_k}$. Sachant que $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p - a}\right)(t) = e^{at}$ et du fait que $\mathscr{L}^{-1}$ est linéaire, l'originale de F est donnée par la formule

$$\mathscr{L}^{-1}(F)(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$$

qu'on appelle formule de Heaviside.

5.3.2 Transformée inverse de $\mathscr{L}$aplace d'une dérivée

Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{C}$. On pose $\mathscr{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t) e^{-tp} dt$ sa transformée de $\mathscr{L}$aplace. On suppose que les conditions de dérivation sous le signe intégrale sont réunies. Alors :

$(\mathscr{L}(f))'(p) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}\left(f(t)\mathrm{e}^{-tp}\right)dt = -\int_0^\infty tf(t)\mathrm{e}^{-tp}dt = -\mathscr{L}(tf(t))(p)$. En composant par $\mathscr{L}^{-1}$, on obtient :

$$\mathscr{L}^{-1}\left[(\mathscr{L}(f))'\right](t) = -tf(t)$$

Et par récurrence sur n, la dérivée d'ordre n :

$$\mathscr{L}^{-1}\left[(\mathscr{L}(f))^{(n)}\right](t) = (-1)^n t^n f(t)$$

5.3.3 Transformée inverse de $\mathscr{L}$aplace d'une translation

On cherche l'originale de $\mathscr{L}(f)(p-a)$.
Si $\mathscr{L}(f)(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tp}dt$, alors

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f)(p-a) &= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t(p-a)}dt = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tp}\mathrm{e}^{ta}dt\\ &= \int_0^\infty [f(t)\mathrm{e}^{ta}]\mathrm{e}^{-tp}dt = \mathscr{L}(\mathrm{e}^{ta}f(t))(p).\end{aligned}$$

D'où

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{L}(f)(p-a)\right](t) = \mathrm{e}^{ta}f(t)$$

5.3.4 Transformée inverse de $\mathscr{L}$aplace d'une homothétie

On cherche l'originale de $\mathscr{L}(f)(kp)$, avec $p \in \mathbb{R}$ et $k > 0$.
Posons $(\mathscr{L}(f_k))(p) = \mathscr{L}(f)(kp)$.
$\mathscr{L}(f)(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tp}dt \Longrightarrow \mathscr{L}(f)(kp) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tkp}dt.$
On pose $kt = u$ donc $du = kdt$ on obtient alors :

$$\mathscr{L}(f)(kp) = \frac{1}{k}\int_0^\infty f\left(\frac{u}{k}\right)\mathrm{e}^{-up}du = \frac{1}{k}\mathscr{L}\left(f_{1/k}\right)(p)$$

En composant par $\mathscr{L}^{-1}$ on obtient la relation de la transformée inverse par

$$\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(f_k))(t) = \frac{1}{k}f_{1/k}(t) = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$$

5.3.5 Application de la transformée de $\mathscr{L}$aplace aux équations différentielles

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à cœfficients constants

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(t) \qquad (*)$$

On demande de trouver la solution de cette équation $y = y(t)$ pour $t \geq 0$ et vérifiant les conditions initiales :
$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$.
Ce genre de problème est déjà résolu de la manière suivante :
nous cherchons d'abord une solution générale de (*) contenant n constantes arbitraires ; puis nous déterminons les constantes de manière que les conditions initiales soient

vérifiées.
Nous exposerons maintenant une méthode plus simple de résolution en introduisant la transformée de $\mathscr{L}$aplace.
On cherche la transformée de $\mathscr{L}$aplace des deux membres de l'équation (*) :

$$\mathscr{L}\left(a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny\right)(p) = \mathscr{L}(f)(p) \qquad (**)$$

En utilisant les propriétés de linéarité, l'équation (**) devient :

$$a_0\mathscr{L}(y^{(n)})(p) + a_1\mathscr{L}(y^{(n-1)})(p) + \ldots + a_{n-1}\mathscr{L}(y')(p) + a_n\mathscr{L}(y)(p) = \mathscr{L}(f)(p)$$

Sachant que $\mathscr{L}(y^{(k)})(p) = p^k\mathscr{L}(y)(p) - \sum_{i=1}^{k} p^{i-1}y^{(k-i)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, on remplace ces expressions dans l'équation (**) pour aboutir à une équation algébrique du type $\mathscr{L}(y)(p)(\varphi_n(p)) = \mathscr{L}(f)(p) + \psi_{n-1}(p)$, avec φ_n un polynôme de degré n et ψ_{n-1} un polynôme de degré $n-1$. L'équation algébrique est :

$$\mathscr{L}(y)(p) = \frac{\psi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{\mathscr{L}(f)(p)}{\varphi_n(p)}$$

Pour finir, on utilise la transformée inverse de $\mathscr{L}$aplace pour déterminer la solution $y(t)$.

Exemple 5.3.1
1) Soit l'équation $y' + y = 1$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.
Par application de la transformée de $\mathscr{L}$aplace, on obtient :
$\mathscr{L}(y')(p) + \mathscr{L}(y)(p) = \dfrac{1}{p}$ ou encore $p\mathscr{L}(y)(p) - y(0) + \mathscr{L}(y)(p) = \dfrac{1}{p}$.
D'où $\mathscr{L}(y)(p)[p+1] = \dfrac{1}{p}$ et par suite $\mathscr{L}(y)(p) = \dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.
On conclut alors que $y(t) = \mathscr{L}^{-1}(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1})(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$.
2) Résoudre, en utilisant la transformée de $\mathscr{L}$aplace, l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 5y = \sin t \quad \text{avec les conditions initiales } y(0) = 1; \quad y'(0) = 2.$$

On applique la transformée de $\mathscr{L}$aplace aux deux membres de l'équation. On aura :
$\mathscr{L}[(y'') + 2y' + 5y](p) = \mathscr{L}(y'')(p) + 2\mathscr{L}(y')(p) + 5\mathscr{L}(y)(p) =$
$p^2\mathscr{L}(y)(p) - py(0) - y'(0) + 2(p\mathscr{L}(y)(p) - y(0)) + 5\mathscr{L}(y)(p) = \mathscr{L}(y)(p)[p^2 + 2p + 5] - p - 4$.
L'équation devient :
$\mathscr{L}(y)(p)[p^2 + 2p + 5] - p - 4 = \mathscr{L}(\sin t)(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$ et donc

$$\mathscr{L}(y)(p) = \frac{p+4}{p^2 + 2p + 5} + \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}$$

On décompose la fraction en éléments simples et on aboutit à l'équation algébrique :

$$\mathscr{L}(y)(p) = \frac{11}{10}.\frac{p+1}{(p+1)^2 + 2^2} + \frac{29}{10.2}.\frac{2}{(p+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{10}.\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5}.\frac{1}{p^2+1}$$

L'originale est alors :

$$y(t) = \frac{1}{10}e^{-t}\cos 2t + \frac{29}{20}e^{-t}\sin 2t - \frac{1}{10}\cos t\frac{1}{5}\sin t$$

ou encore

$$y(t) = e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t + \frac{29}{20}\sin 2t\right) - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$$