Chapitre 1 : Fonction d'une variable complexe

① Rappelle : l'ensemble des nombre complexe $\mathbb{C}$ est défini par

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \text{, avec } x, y \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}.$$

ⓐ Propriétés : soit $z = x + iy$ un nombre complexe

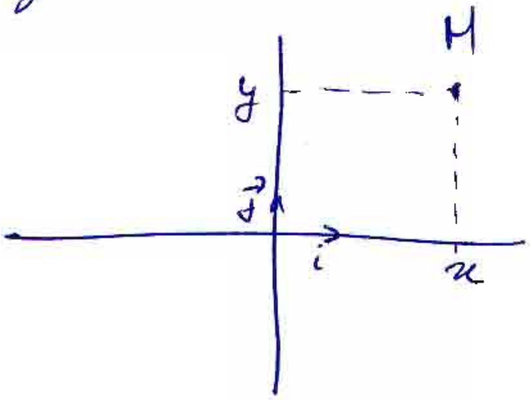
1) Le model de z est $\|z\| = \|x+iy\| = \sqrt{x^2+y^2}$

2) Le conjugue de z est $\bar{z} = x - iy$, avec

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = \|z\|^2.$$

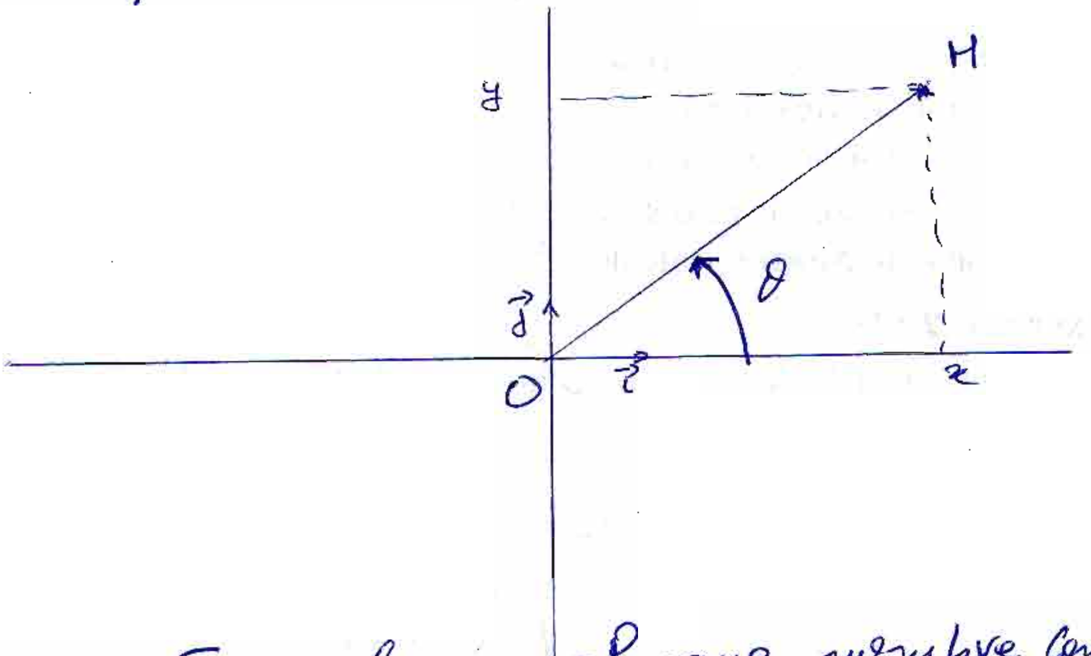
3) si on consider $\mathbb{C}$ comme une espace vectorielle sur $\mathbb{R}$, on trouve $\dim \mathbb{C} = 2$, qui le même que $\mathbb{R}^2$ ($\dim \mathbb{R}^2 = 2$), donc on peut considérer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont les mêmes.

4) D'apres la remarque 3), on peut le représenté tout nombre $z \in \mathbb{C}$ par un point $M(x, y)$ dans le plan cartiziaune ($z = x + iy$).



(b) L'ecriture polaire de z est :

$z = \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec θ est l'argument de z noté par $\arg z$ (θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{i}$)



(c) De Moivre Formul : chaque nombre complexe z peut etre ecrit sous la forme :

$z = \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta) = \|z\| e^{i\theta}$, avec $\theta = \arg z$.

(d) Racines d'un nombre complexe : On appelle $n$ieme racine de z le nombre $w \in \mathbb{C}$ avec $w^n = z$ ($n \in \mathbb{N}$).

ou $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \left(\|z\| e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}} = \|z\|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

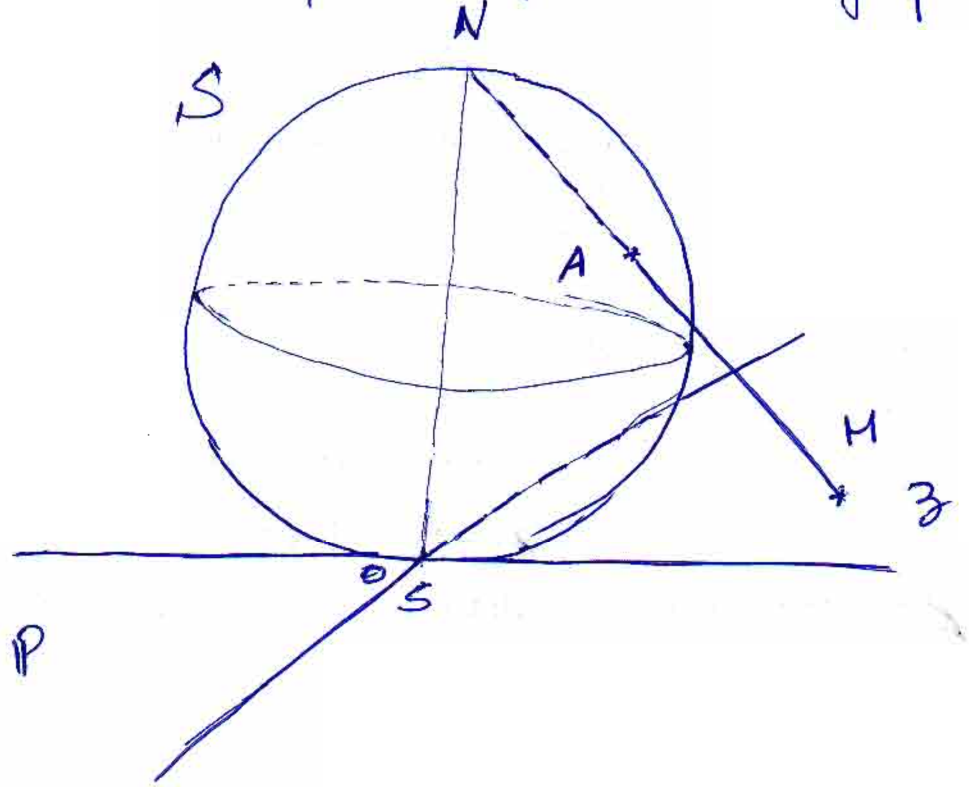
$= \|z\|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

donc il y a n racines de z qui satisfait l'equation $w^n = z$

(e) $z^k = \left[\|z\|(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^k = \|z\|^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))$

$= \|z\|^k e^{ik\theta}$, $k \in \mathbb{N}$ et $\theta = \arg z$.

(f) Représentation sphérique, projection stéréographique



soit $\mathbb{P}$ le plan complexe et S le sphère unité (de rayon $r = 1$) avec $s, N \in S$ et $s \in \mathbb{P}$ avec $s = 0$.

<u>Exemple</u> : Les solutions de l'équation $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, dits les racines de l'unité, et on a :

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

donc l'ensemble de tous les racines de l'unite est

$$R_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}.$$

<u>Remarque</u> : Il n'existe pas une ralation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$, Contrairement au Cas de $\mathbb{R}$.

② Fonctions holomorphes.

ⓐ Dérivation et différentielles:

<u>Définition</u> : une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie au voisinage d'un point z_0 est dite dérivable en z_0 s'il existe un nombre noté $f'(z_0) \in \mathbb{C} \neq \infty$, tel que

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z_0)}{h}.$$

f est dite différentiable en z_0, s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ avec $\varepsilon(\cdot) \xrightarrow[\cdot \to 0]{} 0$ telle que, pour h de module assez petit

$$f(z+h) = f(z) + h f'(z_0) + h\varepsilon(h)$$

<u>Remarque</u> : Cette notion identique à celle de $\mathbb{R}$, beaucoup plus forte que son analogue reel, car $h f'(h)$ désigne la multiplication complexe de $f'(z)$ et h et non au sens des applications linéaires.

<u>Exemples</u> :

⊛ La fonction $f(z) = z^2$ est dérivable sur $\mathbb{C}$ et $f'(z) = 2z$

En effet : soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2z + h)}{h} = 2z.$$

(*) De façon plus général, comme dans $\mathbb{R}$, les fonction polynomiales ou rationnelles sont dérivable. avec les même les règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

(*) La fonction $g(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point.

En effet :

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h}$$

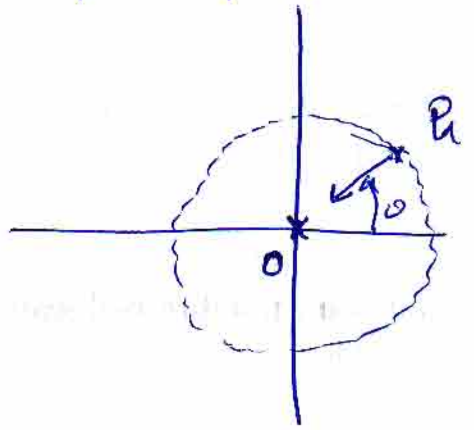
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\|h\| e^{-i\theta}}{\|h\| e^{i\theta}}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^{-i2\theta} = e^{-i2\theta} \text{ (n'est pas unique).}$$

Quant $h \to 0$, $\|h\| \to 0$

mais $\arg(h) = \theta$ ne dépend

pas par $\|h\|$.



Proposition : Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, g et f deux fonction dérivable réspectivement en z_0 et $g(z_0)$, alors $f \circ g$ est dérivable en z_0 et :

$$(f \circ g)'(z_0) = (f' \circ g)(z_0) \cdot g'(z_0).$$

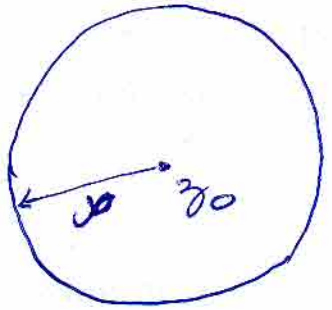
Proposition : soient $w_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction dérivable en w_0. On suppose de plus que f est inversible sur un voisinage de w_0 et que $f'(w_0) \neq 0$.

Alors f^{-1} est dérivable en $z_0 = f(w_0)$ et :

$$(f^{-1})'(z_0) = \frac{1}{(f'\circ f^{-1})(z_0)}.$$

boule

<u>Définition</u> (Holomorphe) : Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur U. On dit que f est holomorphe sur U si f est dérivable en tout point de U.



une boule ouvert de rayon ρ et de centre z_0 est l'ensemble des elements $z \in \mathbb{C}$ avec $\|z - z_0\| < \rho$, . i.e

$$U = B_\rho(z_0) = \{ z \in \mathbb{C}, \|z - z_0\| < \rho \}.$$

une Boule fermé $B_\rho(z_0)$ est

$$\overline{B}_\rho(z_0) = \{ z \in \mathbb{C}, \|z - z_0\| \leq \rho \}.$$

(3) Conditions de Cauchy Riemann.

une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut être vue comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x+iy).$$

On peut donc parler de différentielle et de dérivées partielles de f par rapport à x et y. En général une fonction dérivable est différentiable, mais l'inverse n'est pas toujours vrais.

Proposition : Conditions de Cauchy Riemann

Soit f une fonction définie au voisinage de z_0. Les 2 assertions suivantes sont équivalentes (notons $f(z)=f(x,y)$)

① f est dérivable en z_0.

② f est $\mathbb{R}^2$-différentiable en z_0 et on a en ce point les conditions de Cauchy Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

de plus $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Démonstration :

① ⇒ ② : supposons f dérivable en $z_0 = (x_0, y_0)$

$$f'(z_0) = \lim_{H\to 0} \frac{f(z_0+H) - f(z_0)}{H} = \lim_{H\to 0} \frac{f(x_0+iy+H) - f(z_0)}{H}$$

⊛ si $H = h \in \mathbb{R}$, on a donc

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h+iy_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

⊛ si $H = ih$, $h \in \mathbb{R}$:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y+h) - f(x_0,y_0)}{ih} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$.

Lemme : Soit $f(x,y) = U(x,y) + i\,\mathcal{V}(x,y)$

avec U et $\mathcal{V}$ sont les parties réelles et imaginaires de f

Donc les conditions de Cauchy Riemann sont :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}.$$

Exemple : Soit $f(z) = \bar{z} = x - iy = f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-iy) - (x-iy)}{h}$$

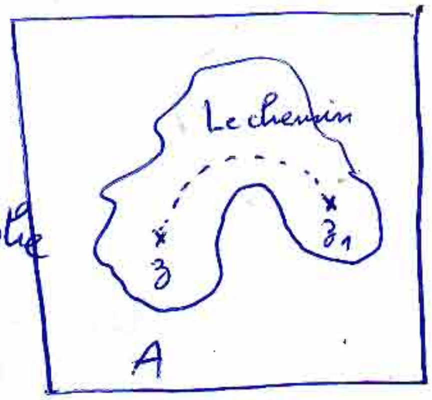
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x - iy - i\ \ -(x-iy)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-ih}{h} = -i$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

Définition : une partie A de $\mathbb{C}$ dite connexe par arcs, si tout couple de points de A est relié par un chemin dans A.



Définition : Tout connexe par arcs est connexe

Lemme : Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, si $f' = 0$ sur U, alors f est constante

④ Fonction élémentaires

⊛ Fonctionspolynomiale: définie par

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^k \ , \quad \alpha_k\in\mathbb{C}, \ n\in\mathbb{N} \text{ et } \alpha_0\neq 0$$

P polynôme de degré n.

⊛ Fonctions rationnelle: soit P, Q deux polynômes. la fonction $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ dite f. rationnelle.

⊛ Fonction exponentielle: $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$.

⊛ F. Trigonométrique:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \ , \qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

⊛ $\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$; ⊛ $\csc=\dfrac{1}{\sin z}$

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} \ , \quad \cot z=\frac{1}{\tan z}$$

<u>Remarque</u>: Le plupart des propriétés des fonctions trigonométrique sur $\mathbb{R}$ sont valable dans $\mathbb{C}$.

$\sin^2 z+\cos^2 z=1$, $\sin(-z)=-\sin z$

$\cos(-z)=\cos z$.

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1$

$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

⊛ Fonctions hyperbolique: $\sinh=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$

$\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$, ⊛ $\cancel{\operatorname{sech} z=\dfrac{1}{\cosh z}}$

$\tanh z=\dfrac{\sinh z}{\cosh z}$, $\coth=\dfrac{1}{\tanh}$

Chapitre 2 : Théorème de Cauchy.

(1) Fonctions multiforme :

(a) Fonction logarithmique :

On définie la fonction logarithmique d'une variable complexe z comme la fonction inverse de e^z par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \ln z = \ln\|z\| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

avec $-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$.

Propriétés :

* $\ln z$ est une fonction multiforme.
* On pose $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

  $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec

  $\mathrm{Re}(\ln z) = \ln r \qquad \mathrm{Im}(\ln z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
* On pose $k = 0$, On a la fonction définie par :

  $$\mathrm{Ln}\, z = \ln\|z\| + i\,\mathrm{Arg}\, z \quad , \quad -\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi$$

  appelée la détermination principal de logarithme qui est une fonction uniforme.
* Soient $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$ et $-\pi \leq \theta \leq \pi$, et soit $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta)$.

  si la formule de Cauchy Riemann est verifiea, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = -r\frac{\partial Q}{\partial r}$$

Cette formule dite : F.C.R dans les coordonnées polaires.

(*) On a la determination principal de log dans les coordonnées polaires est $Ln z = Ln r + i\theta$, $\theta = Arg(z)$.

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 = -r\frac{\partial Q}{\partial r}$$

donc $Ln z$ est une fonction holomorphe sur $r>0$, $-\pi < \theta < \pi$, et on a : $e^{Ln z} = z = Ln e^{z}$, alors

$$\left(Ln z\right)' = \frac{1}{e^{Ln z}} = \frac{1}{z}.$$

② L'intégration des fonctions complexes.

<u>Définition</u> : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une application avec $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $a<b$. On dit que γ est de classe C^1 par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une partition

$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b$ avec

γ admet une prolongement par continuité de classe C^1 sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n$.

Déffinition : soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a<b)$.
On appele chemin dans D chaque application $\gamma : [a,b] \to D$ verifier
⊛ γ de class C^1 par morceaux sur $[a,b]$.
⊛ γ injective.

Remarque

⊛ $\gamma(a)$ est l'origine et $\gamma(b)$ est l'extrémité de γ.
⊛ si $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ est une chemin fermé.
⊛ On suppose que γ dans le sense positive, alors γ^- est le chemin dans le sense inverse sur le ~~m~~ support de γ.

Exemple

⊛ Le cercle de centre w et de rayon $R>0$ définie par

$$\gamma_{w,R} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma_{w,R}(t) = w + Re^{it}.$$

② Le segement $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

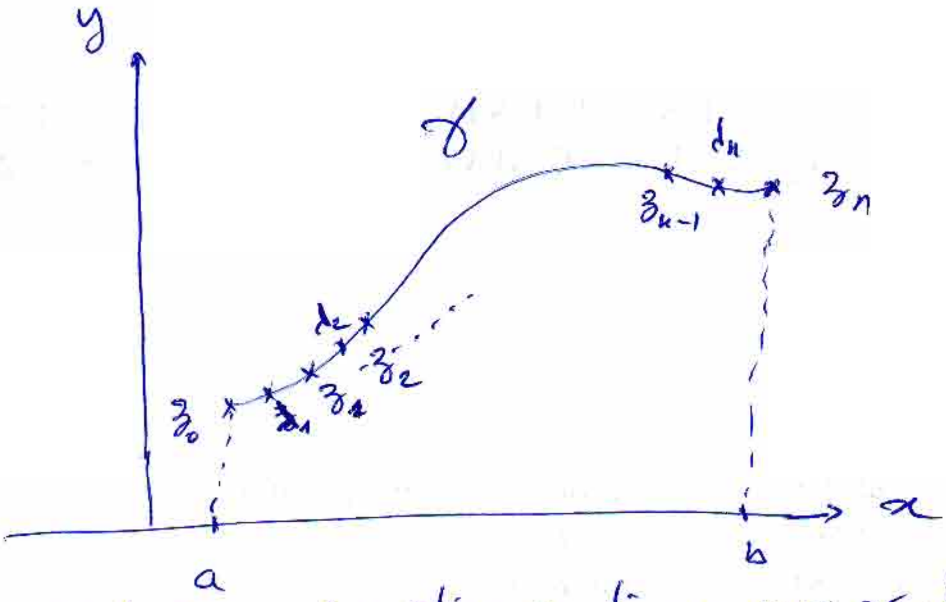
$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = (1-t)\alpha + t\beta.$$

Ⓐ L'intégral d'une fonction complexe sur un chemin.

soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin, f une fonction complexe définie en chaque point de γ.
soit $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ une partition de γ avec $\gamma(a) = z_0$
$\gamma(b) = z_n$ et soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ avec
$\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $\lambda_k \in]z_{k-1}, z_k[$, on dit que f est intégrable sur γ si

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)(z_k - z_{k-1}) = l < \infty,$$ et on ecrit

$$\int_\gamma f(z)\,dz = l$$



<u>Propriétés:</u> soit f une fonction continue sur γ, alors f est intégrable sur, et :

⊛ si $f(z) = u + iv$, alors $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy).$$

⊛ si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$; $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \gamma'(t)\, f(\gamma(t))\,dt$$
$$= -\int_b^a \gamma'(t)\, f(\gamma(t))\,dt$$
$$= -\int_{\gamma^-} f(z)\,dz.$$

Exemples:

① $f(z) = z$, $\gamma_{0,R} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \longmapsto Re^{it}$ $\Rightarrow \gamma'(t) = iRe^{it}$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{2\pi}^{2\pi} \gamma'(t) f(\gamma(t))\,dt = \int_0^{2\pi} iRe^{it}.Re^{it}\,dt$$
$$= iR\int_0^{0} e^{i2t}\,dt = iR\left[\frac{e^{i2t}}{2i}\right]_0^{2\pi} = \frac{R}{2}\left[e^{i4\pi} - e^0\right] = 0.$$

② $f(z)=z$, $\gamma:[0,\frac{1}{4}]\to\mathbb{C}$ $\to \gamma'(t)=i2\pi R e^{i2\pi t}$.
$t\mapsto R e^{i2\pi t}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_0^{\frac{1}{4}} i2\pi R e^{i2\pi t}\cdot R e^{i2\pi t}\,dt=-R^2.$$

<u>Définition</u>: soit f une fonction complexe sur $D\subset\mathbb{C}$
On appele fonction primitive de f, tout fonction F holomorphe sur D vérifier $F'=f$ sur D.

<u>Proposition</u>: si F une fonction primitive de f sur D et $\gamma:[a,b]\to D$ un chemin dans D, alors:

$$\int_\gamma f(z)\,dz=F(\gamma(b))-F(\gamma(a)).$$

<u>Exemple</u>: $f(z)=z$, $\gamma:[0,\frac{1}{4}]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t)=Re^{i2\pi t}$.
avec $\gamma(0)=R$, $\gamma(\frac{1}{4})=iR$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\left[\frac{1}{2}z^2\right]_R^{iR}=-\frac{1}{2}R^2-\frac{1}{2}R^2=-R^2$$

<u>Définition</u>: Soit $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ avec $\gamma\subset D$.
On appele longueur de γ la valeur positive $l(\gamma)$
avec $l(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt$.

<u>Exemple</u>:
La longueur d'une cercle de centre z_0 et rayon $R>0$ dans le sens positive est $(\gamma(t)=z_0+Re^{it})$

$$l(\gamma_{z,R})=\int_0^{2\pi}\|iRe^{it}\|\,dt=R\int_0^{2\pi}dt=2\pi R.$$

ⓑ Inégalité de Darboux

<u>Proposition</u> : soit f une fonction intégrable sur γ de longueur L, si il existe $M = \sup_{\gamma} \|f\| < \infty$

alors $\| \int_{\gamma} f(z) dz \| \leq M L$

<u>Exemple</u> : $\| \int_{\gamma} (x^2 + i y^2) dz \| \leq \pi$, avec $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$

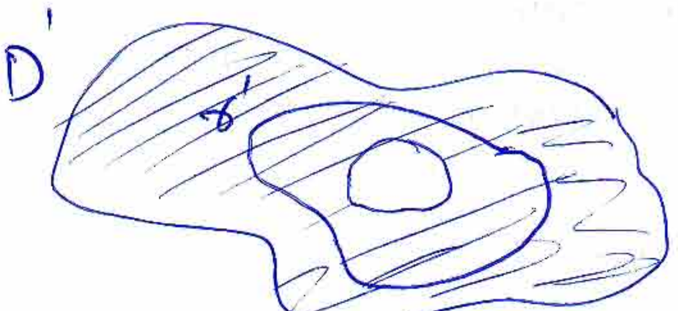
$\gamma(t) = e^{it}$, et $f(z) = x^2 + i y^2$

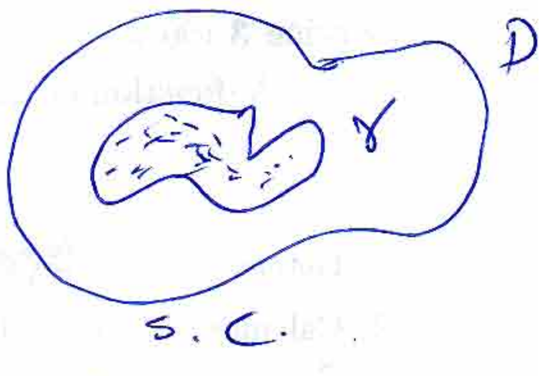
$\forall z \in \gamma : \| f(z) \| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\Rightarrow \sup_{\gamma} \| f \| \leq 1 \Rightarrow \| \int_{\gamma} f(z) dz \| \leq M L = L = \pi$

ⓒ Intégration d'une fonction Holomorphique sur un chemin.

<u>Déf</u> : soit D une partie de $\mathbb{C}$, on dit que D est simplement connexe, ssi, $\forall \gamma$ une chemin dans D, alors tout les points à l'intérieur de γ sont dans D.





Sinon on dit que D est multiconnexe.

③ Théorème de Cauchy :

soit D une partie de $\mathbb{C}$ simplement connexe et f une fonction holomorphe sur D, et soit γ un chemin fermé inclue dans D, alors

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad \Big(\oint_{\gamma} \text{ est l'intégrale sur un chemin fermé} \Big).$$

Exemple : $\displaystyle\oint_{\gamma_{z_0,R}} z^2 dz = 0$.

<u>Resultat</u> : soit $D \subset \mathbb{C}$ un simplement connexe borné par γ un chemin fermé, alors si f holomorphe sur D et continue sur γ alors

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 0 .$$

<u>Exemple</u> :

$f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $D = \{ z \in \mathbb{C},\ 1 < \|z\| < 3 \}$.

et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $\gamma'(t) = i2e^{it}$.

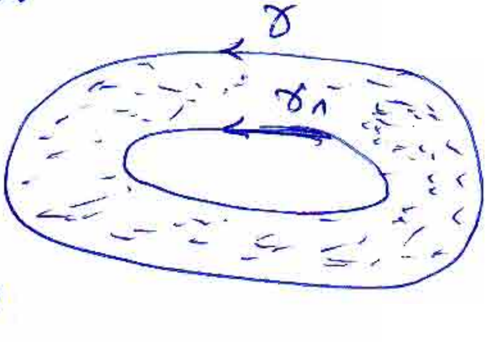
mais : $\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{2e^{it}}}{\cancel{2e^{it}}} . dt = i2\pi \neq 0$.

<u>Proposition</u> : soit f une fonction holomorphe sur D simplement connexe, alors f admet une primitive F sur D.

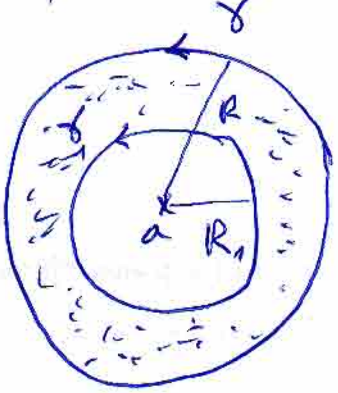
(A) Théorème de Cauchy sur une partie multiconnexe

Soit D une partie multiconnexe borné par les chemin γ, γ_1 fermés de même direction, si f est holomorphe sur D et continue sur γ_1, γ, alors

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$



Exemple: $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$, $a \in \mathbb{C}$, et soit
$\gamma(t) = Re^{it} + a$, $\gamma_1(t) = R_1 e^{it} + a$, $R > R_1 > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.



$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}\,dt}{(Re^{it}+a)-a}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt$$

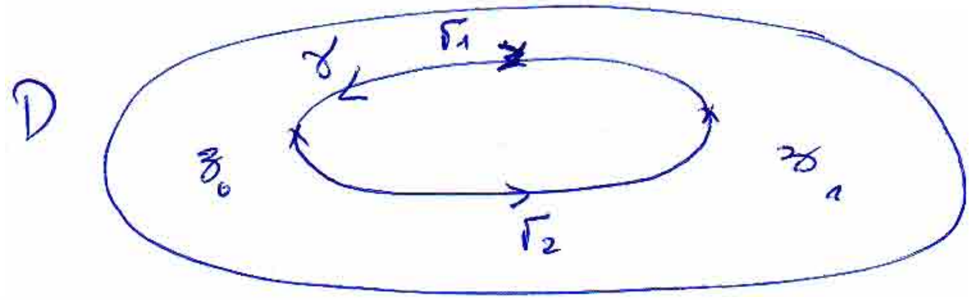
$$= \int_0^{2\pi} \frac{iR_1 e^{it}}{(R_1 e^{it}+a)-a}\,dt = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i$$

En général: si D est une partie multiconnexe éfinie par le chemin $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ fermés 2 à 2 disjoints et de même direction que γ, et f holomorphe sur D et continue sur $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, alors:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

Resultat: Soit D simplement connexe, et $z_0, z_1 \in D$.
Si f est holomorphe sur D, alors

$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ ~~est~~ indépendent ~~pas que~~ le chemin entre z_1, z_0

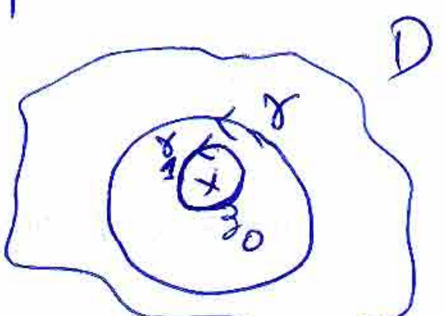


$$\int_\gamma f(z)dz = 0 = \int_{\Gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_2^+} f(z)dz$$

Ⓑ Formule intégrale de Cauchy.

Proposition:

Soit f holomorphe sur D simplement connexe, et $z_0 \in D$, et γ un chemin fermé dans D contenant z_0, on a



$$\boxed{2\pi i f(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz \quad (\text{F.I.C})}$$

Preuve: $\frac{f(z)}{z-z_0}$ est holomorphe sur $D-\{z_0\}$, et d'aprés le théorème, si γ_1 est le cercle de centre z_0 et de rayon ε, alors:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})\, i\cancel{\varepsilon e^{it}}}{(\cancel{z_0}+\cancel{\varepsilon e^{it}})-\cancel{z_0}}dt.$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it})dt.$$

et comme f est continue sur D, alors

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \lim_{\varepsilon \to 0} i\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it})\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0)\,dt = 2\pi i\; f(z_0).$$

Exemple: Par la F.I.C, l'intégrale:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}dz = 2\pi i e, \quad \gamma(t) = e^{it}+1,\ 0\leq t\leq 2\pi,\ f(z)=e^z,\ z_0=1$$

en effet: $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}dz = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i e$

Proposition: Soit D simplement connexe, et f de classe C^∞ sur D, et γ chemin fermé contenant z_0 dans D, alors

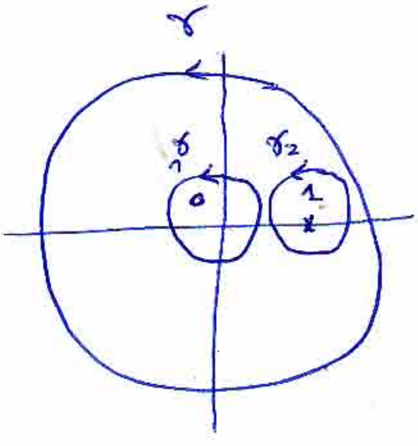
$$\boxed{\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)} \quad \text{(F.I.C d'ordre } n\text{)}$$

Exemples

* $\gamma(t) = e^{it}$ $(\|z\|=1)$, $0\leq t\leq 2\pi$.

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(e^{iz}\right)''\Big|_{z_0=0} = \frac{2\pi i}{2}(i.i) = -i\pi.$$

* $\gamma = 2e^{it}$ $(\|z\|=2)$, $0\leq t\leq 2\pi$



$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)} = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-1)}dz + \int_{\gamma_2}\frac{e^z}{z(z-1)}dz$$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z}dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{z-1}dz$$

$$\left(\frac{e^z}{z-1}\right)'\Big|_{z_0=0} = \frac{1}{-1}, \quad \left(\frac{e^z}{z}\right)'\Big|_{z_0=1} = \frac{e}{1}.$$

par F.I.C : $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{-1}\right) + 2\pi i\left(\frac{e}{1}\right)$

$$= 2\pi i\,(e-1).$$

Ⓒ Théorème de Morera :
si f continue sur D simplement connexe, et
si $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour chaque γ fermé dans D,
alors f holomorphe sur D.

Ⓓ Inégalité de Cauchy :
Soit f holomorphe sur et à l'intérieur du
$\gamma : \|z-z_0\| = r$, $r>0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, alors

$$\|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{M}{r^n}\,n!, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad M = \max_\gamma |f(z)|$$

Preuve : A partir de la forme intégale de Cauchy

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} = f^{(n)}(z_0)$$

$$\|f^{(n)}(z_0)\| = \frac{n!}{2\pi}\left\|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right\|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi}\int_\gamma \frac{\|f(z)\|}{\|z-z_0\|^{n+1}}\,\|dz\|$$

$$\leq \frac{Mn!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\,dt}{r^{n+1}} = \frac{Mn!}{2\pi r^n}\cdot 2\pi = \frac{Mn!}{r^n}.$$

avec $M = \max_\gamma \|f(z)\|$.

Ⓔ Théorème de Liouville :

Soit f une fonction entière et bornée, i.e.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\|f(z)\| < M$,

Alors f est constante sur $\mathbb{C}$.

Démonstration :

On suppose $n = 1$ dans l'inégalité de Cauchy

$\|f'(z_0)\| \leq \frac{M}{r}$, pour chaque $z_0 \in \mathbb{C}$

lorsque $r \longrightarrow \infty$: $\|f'(z_0)\| \leq 0$

$\Rightarrow \|f'(z_0)\| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \Rightarrow f(z_0) = C$

$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = C$.

Ⓕ Théorème : Le principe du maximum.

Soit f holomorphe et non constante à l'intérieur et sur γ un chemin fermé, alors $\|f(z)\|$ prend sa valeur maximal sur γ, i.e :

$\exists z_0 \in \gamma$: $\|f(z_0)\| = \max \|f(z)\|$

Théorème : Le principe du minimum.

Si f holomorphe et non constante sur et à l'intérieure de γ chemin fermé et $f(z) \neq 0$. Alors f prend sa valeur minimum sur γ.

$\exists z_0 \in \gamma$: $\|f(z_0)\| = \min_{\gamma} \|f(z)\|$

Chapitre 3 Séries entières - Séries de Laurent

<u>Remarque</u> : Touts les définition et le théorème dans les suite et les séries des fonctions réel restent valable dans les séries entières.

① Séries entières :

Définition : soit $z_0 \in \mathbb{C}$, tout séries de la forme

$$\sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

avec $a_n, z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ appelée série entière.

Rayon de convergence

Définition : On appele rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ le nombre positif R qui vérifie :

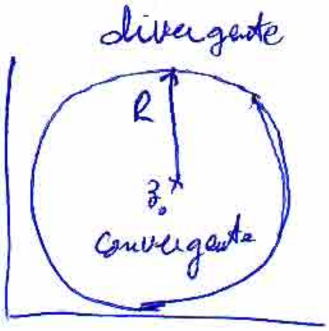
ⓐ $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ absolument convergente dans le disque ouvert

$$D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C}, \| z - z_0 \| < R \}.$$

ⓑ $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ divergente sur $R < \| z - z_0 \|$.

<u>Remarque</u> : Si $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ converge seulement en z_0, alors $R = 0$

<u>Remarque</u> : Si $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ converge sur $\mathbb{C}$, alors $R = \infty$



<u>Exemple</u> : $\sum_{n\geq 0} z^n = \sum_{n\geq 0} u_n$

On utilisant le critère d'Alembert :

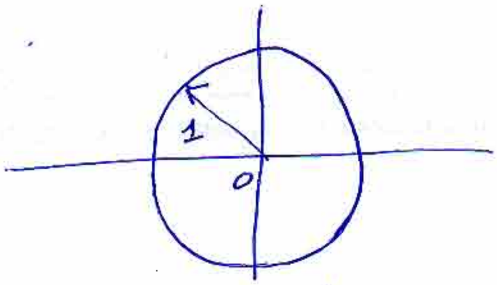
$\left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = \left\| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right\| = \|z\|$, si $\|z\| < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} z^n$ est absolument convergente, sinon la série est divergente.

donc $R = 1$

Définition : Le disque de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ est le disque

$$D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C}, \|z - z_0\| < R \}$$

Exemple : le disque de convergence de $\sum_{n\geq 0} z^n$ est $D(0,1)$.



Proposition : soit $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors :

$$R = \lim_{n\to\infty} \sup\left(\frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sup\left(\sqrt[n]{\|a_n\|}\right)}$$

si la limite existe.

<u>Remarque</u> : On a aucune résultat sur la frontière du $D(z_0, R)$ $(\|z - z_0\| = R)$.

Exemples:

ⓐ $\sum_{n\geq 0} \left(4+(-1)^n\right)^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|a_n\|} = \lim_{n\to\infty} \sup \| 4+(-1)^n \| = 5$$

donc $R = \frac{1}{5}$ et D.C est $D\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

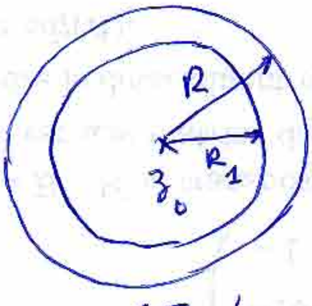
ⓑ $\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|} = \lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{(2n)! \cdot ((n+1)!)^2}{(n!)^2 \cdot (2n+2)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \right| = \frac{1}{4}$$

et le D.C est $D\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Proposition: La série $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ de rayon de convergence R est uniformement convergente sur le disque $D = \{ z \in \mathbb{C}, \|z - z_0\| \leq R_1 < R \}$.



Proposition:
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ une S.E de disque de convergence $D(z_0, R)$, et γ un chemin à l'interieur de $D(z_0, R)$; alors

$$\int_\gamma \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n dz = \sum_{n\geq 0} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n dz$$

Proposition : Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ une S.E de R.C. R, alors la fonction f définie par

$$f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

est une fonction holomorphe sur $D(z_0,R)$ avec

$$\forall z\in D(z_0,R),\quad f'(z)=\sum_{n\geq 1} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

et $f'(z_0)=1a_1=a_1$

En général ; $\forall z\in D(z_0,R)$: $f^{(n)}(z_0)=a_n n!$, $\forall n\geq 0$.

donc $f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

② Série de Taylor :

Définition : Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(z_0,r)$, $r>0$ et $z_0\in\mathbb{C}$, alors

$$\forall z\in D(z_0,r) : f(z)=\sum_{n\geq 0} C_n (z-z_0)^n,$$

avec $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

γ : un chemin fermé contenue dans $D(z_0,r)$, au direction positive, autour z_0. Cette developement s'appele le developement de Taylor au voisinage de z_0

En effete : on a $\forall z\in D(z_0,r)$; $f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

et par formule intégale de Cauchy, on a

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = C_n .$$

Remarque : Le développement de Taylor est unique.

Exemple : $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $D_f = \mathbb{C}^*$, $z_0 = 1$.

On a f holomorphe sur $D(1,1)$, donc

$$\forall z \in D(1,1) ; f(z) = \sum_{n \geq 0} C_n (z-z_0)^n$$

(M1) $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$

par récurrence : $\forall n \geq 0 : f^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}$

$$\Rightarrow C_n = (-1)^n (n+1)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1)(z-1)^n$$

(M2) On pose $Z = z - 1 \Rightarrow z = Z + 1$, donc

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(Z+1)^2} = \frac{-d}{dZ}\left(\frac{1}{1+Z}\right) = \frac{-d}{dZ}\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n Z^n\right)$$

$$= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} n Z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1) Z^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1)(z-1)^n .$$

Définition : Les fonctions qui possèdent le dev. de Taylor sur $\mathbb{C}$ s'appele fonction entière.

Dévelopement de Taylor des fonctions usuelles

au voisinage $z_0 = 0$:

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad , R = \infty$$

$$\cos z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , R = \infty$$

$$\sin z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , R = \infty$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \quad , R = 1.$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n \quad , R = 1$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \quad , R = 1$$

$$\mathrm{ch}\, z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , R = \infty$$

$$\mathrm{sh}\, z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , R = \infty.$$

Proposition : Si f une fonction entière, alors la série de Taylor de f en z_0 est convergente, et sa somme est $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

③ Fonctions analytiques.

soit U une partie de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction

Définition : f dite analytique en z_0 ssi f est developpable en série entière au voisinage de z_0.

Définition : f dite analytique sur U ssi f est analytique en chaque point de U.

Théorème : Tout fonction analytique sur U est holomorphe sur U.

Preuve : soit f analytique en z_0, alors $\exists r>0$, $\exists a_n \in \mathbb{C}$ avec $\forall z \in D(z_0, r)$: $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$

$$\Rightarrow f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Exemple : $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + z - z_0} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}}, \text{ si}$$

si $|z - z_0| < |z_0|$, on a $\frac{|z - z_0|}{|z_0|} = r < 1$, donc

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}} = \frac{1}{z_0} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

④ Théorème : si f holomorphe sur U, alors elle est analytique sur U

Exemple:

* $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ est analytique sur $D(0,1)$, et on a

$\forall z \in D(0,1) : f(z) = \sum_{n \geq 0} z^n$.

* e^z analytique sur $\mathbb{C}$:

$\forall z_0 \in \mathbb{C}, e^z = e^{z_0} e^{z - z_0} = e^{z_0} \sum_{n \geq 0} \dfrac{(z-z_0)^n}{n!}$

$\Rightarrow f$ analytique sur $\mathbb{C}$.

Proposition: La somme et produit des fonction analytique est une fonction analytique.

Exemples:

* $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ sont analytique sur $\mathbb{C}$
* Les fonction rationnelles sont analytique sur leurs domain de définition.

Proposition: si f analytique sur U, alors f est de classe C^∞, et si:

$\forall z \in D(z_0, r) \subset U : f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$

$\Rightarrow \forall p \geq 0,\ f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \dfrac{n!}{(n-p)!} a_n (z - z_0)^{n-p}$

<u>Remarque</u>: La decomposition des fonctions analytiques est aussi une fonction analytique.

(#) Proposition: Tout fonction holomorphe est une fonction analytique.

(A) Zéros d'une fonction analytique

Définition : Soit U une partie de $\mathbb{C}$, f une fonction analytique sur U et f non nule sur U $(f \not\equiv 0)$.

On appele z_0 zéro de f si $f(z_0) = 0$,

de plus s'il exist n avec $\forall\ i \leq n-1$: $f^{(i)}(z_0) = 0$

et $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, on dit que z_0 est un zéro d'ordre n de f.

Exemple : les zéros de $f(z) = \sin z$ sont les éléments $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; z_k sont des zéros d'ordre $\underline{1}$ (ou zéros simpls) de f, en effet :

$f(z_k) =$ [illegible] $\pi k = 0$ et $f'(z_k) = \cos \pi k \neq 0$.

Définition : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, on dit que z et z' sont isolés, s'il exist $\mathcal{V}_z$ un voisinage de z et $\mathcal{V}_{z'}$ un voisinage de z' avec $\mathcal{V}_z \cap \mathcal{V}_{z'} = \phi$.

Théorème : Les zéros d'une fonction analytique sont isolés.

Lemme : Soient f, g deux fonctions analytiques sur U, et soit $\Omega \subset U$ un ouvert $(\Omega \neq \phi)$, si

$\forall z \in \Omega$: $f(z) = g(z)$, alors

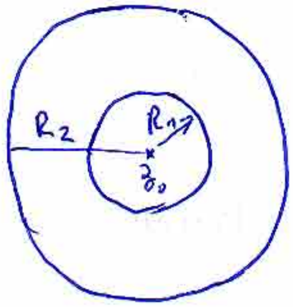
$\forall z \in U$, $f(z) = g(z)$.

Remarque ; m̂ si $g(z) = 0$

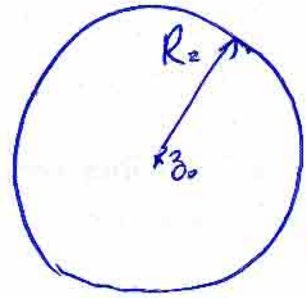
④ série de Laurant

Définition : On définit la couronne ouverte de centre z_0 et des rayons $0 \leq R_1 < R_2$ par :

$$C(z_0, R_1, R_2) = \{ z \in \mathbb{C},\ 0 \leq R_1 < \| z - z_0 \| < R_2 \}.$$



$C(z_0, R_1, R_2)$



$C(z_0, 0, R_2)$

Remarque : On a $z_0 \notin C(z_0, R_1, R_2)$, $\forall R_1 \geq 0$, $R_2 > 0$.

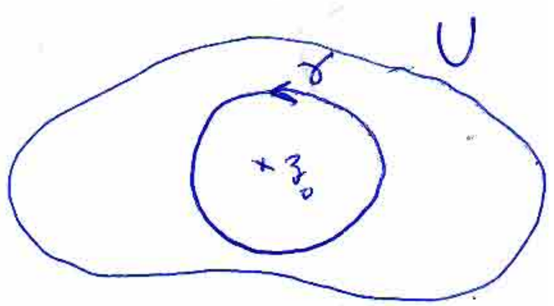
Proposition : Soit $U \subset \mathbb{C}$ et $C(z_0, R_1, R_2) \subset U$, et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique, alors :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad R_1 < \| z - z_0 \| < R_2$$

avec $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \dfrac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw.$

γ : un lacet positif contenue dans $C(z_0, R_1, R_2)$.

cette developpement s'appele série de Laurant de f au voisinage de z_0.



Remarque : On a :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{partie principale.}}$$

Exemple : Trouver le dévelopement de Laurant de $f(z) = \frac{e^z}{z^e}$ au voisinage de $z_0 = 0$.

⊛ La fonction f est analytique (holomorphe) sur $\mathbb{C}^*$, donc dévelopable sur $C(0, 0, +\infty) = 0 < \|z\| < +\infty$ en série de Laurant, et on a :

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \underbrace{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}_{\text{P. principale}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}}_{\text{P. entière}}$$

Ⓐ Les points singuliers

Définition : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que le point $z_0 \in \mathbb{C}$ est singulier de f, si f est non analytique en z_0 et analytique en chaque point $z \neq z_0$ d'un voisinage de z_0.

Exemple : Soit $f(z)=\frac{1}{z-2}$, $z=2$ est le seul point singulière de f.

Ⓑ Les points singulier isolés.

Définition : soit f un fonction, $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que z_0 est un point singulier isolé de f, s'il exist $\rho > 0$ avec f analytique sur $0<\|z-z_0\|<\rho$.

Sinon, z_0 est un point singulier non isolé.

<u>Exemples</u>

(*) $z_0=2$ est un P.S.I. de $f(z)=\frac{1}{z-2}$ car f analytique sur $0<\|z-2\|<+\infty$

(*) $z_0=0$ est un P.S.I. de $e^{1/z}$ car $e^{1/z}$ analytique sur $0<\|z\|<+\infty$.

(*) Les points singuliers de $f(z)=\frac{1}{\sin \pi/z}$ sont les solutions de $\sin \pi/z=0 \Leftrightarrow z_k=\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{Z}^*$

et $z=0$.

$z_k=\frac{1}{k}$, $k\in\mathbb{Z}^*$ sont des P.S.I,

mais $z=0$ est non isolé car chaque voisinage de $z=0$ contient des points singuliers $\neq 0$.

Définition : soit f une fonction et z un P.S de f.

On dit que z_0 est un P.S. amovible si
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A\neq\infty$$

Exemple : $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, on a $z=0$ est un point singulier isolé amovible car f analytique pour $z \neq 0$ et $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq \infty$

Définition : On dit qu'un point S.I. z_0 est un pôle de f si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Exemple :

$f(z) = \frac{z}{z+1}$, $z = -1$ est un pôle de f car f analytique sur $\mathbb{C} - \{-1\}$ et $\lim_{z \to -1} \frac{z}{z+1} = \infty$

Définition : On dit que le point S.I z_0 est un point singulier essentielle de f si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \text{ n'existe pas.}$$

<u>Exemple</u> : ① $z_0 = 0$ est un point S.E de $f(z) = e^{1/z^2}$ car f analytique pour $z \neq 0$ et n'admet aucun limite en $z = 0$, en effet

si $z = x$, $\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{x \to 0} e^{1/x^2} = +\infty$

$z = iy$, $\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{y \to 0} e^{-1/y^2} = 0$

② $z = 0$ est un p. S.E de $z \to \sin\frac{1}{z}$, $z \to \cos\frac{1}{z}$ et $z \to e^{1/z}$

ⓒ <u>Théorème</u> : Soit f une fonction complexe.

① z_0 est un point singulier amovible de ssi la partie principale de la série de Laurent de f au voisinage de z_0 est nul.

② z_0 est un point singulier essentielle de f si la partie principale de la série de Laurent de f en z_0 contient un nombre infini des termes.

③ z_0 est un pôle d'ordre m $(m \geq 1)$ de f ssi si la partie principale de la série de Laurent de f en z_0 contient un nombre fini des termes, i.e :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \cdots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m}, \; c_{-m} \neq 0.$$

<u>Exemples</u> :

① $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$, et $z_0 = 0$, alors au voisinage de 0 :

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(1 - \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right) = -\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+2)!}, \quad k = n - 1$$

alors $z = 0$ est un p. S amovible de f.

② $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ est analytique sur $\mathbb{C} - \{1\}$. donc f développable en série de Laurent sur la couronne $0 < \|z - 1\| < +\infty$

$$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}=\frac{e^{2(z-1)}e^2}{(z-1)^2}=$$

$$=\frac{e^2}{(z-1)^2}\sum_{n\geq 0}\frac{2^n(z-1)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{e^2 2^n}{n!}(z-1)^{n-2}$$

$$=\frac{e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{(z-1)}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^2 2^{k+2}}{(k+2)!}(z-1)^k$$

la partie principale contient un nombre fini des termes $(m=2)$, donc $z=1$ est un pôle d'ordre 2 de f.

Théorème : z_0 est un pôle d'ordre m de f si $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ avec φ une fonction analytique au voisinage de z_0 et $\varphi(z_0)\neq 0$.

(*) si $m=1$, z_0 s'appelle pôle simple.

Exemple : $f(z)=\frac{z^2+2}{z(z+1)^2}$, $z=0$ est un pôle simple car, si $\varphi(z)=\frac{z^2+2}{(z+1)^2}$, on a $f(z)=\frac{\varphi(z)}{z}$, φ analytique au voisinage de $z=0$ et $\varphi(0)=2\neq 0$.

(*) $z=-1$ est un pôle d'ordre 2 de f car, si $h(z)=\frac{z^2+2}{z}$, on a $f(z)=\frac{h(z)}{(z+1)^2}$, h analytique au voisinage de $z=-1$

et $h(-1)=-3\neq 0$.

Théorème : z_0 est un pôle d'ordre $m\geq 1$ de f ssi $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=A\neq 0,\infty$

Exemple :

$f(z)=\frac{1}{z^2(z+2)}$, f analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$. $z=0$ est un pôle d'ordre 2 et $z=-2$ un pôle simple, en effet :

$\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z)=\frac{1}{2}\neq 0,\infty$

et $\lim\limits_{z\to -2}(z+2)f(z)=\frac{1}{4}\neq 0,+\infty$.

Chapitre 4 : Théorème de Résidues.

① Les fonctions méromorphes.

Définition : On appelle fonction méromorphe toute fonction analytique sur $\mathbb{C}$, sauf en nombre fini des pôles.

Exemple : $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)^3}$ est analytique sur $\mathbb{C}$, sauf en $z=1$ (pôle simple) et en $z=2$ (pôle d'ordre 3), alors f est méromorphe

② Théorème des résidues.

Définition : soit f analytique sur la couronne $C(z_0,0,R) = 0 < \|z - z_0\| < R$ avec z_0 un point S. I de f. alors f est developpable en série de Laurent au voisinage de z_0, et on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

On appelle résidue de f en z_0 le coéfficient C_{-1} dans la série de Laurent, et on note

$$C_{-1} = Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\,dz, \text{ avec}$$

$\gamma \subset C(z_0, 0, R)$ un lacet au sens positif autour z_0.

Remarque : Si z_0 est un point S. I amovible, on a $Res(f, z_0) = 0$.

Exemple : Trouver le résidue de $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ en $z_0 = 0$.

M_1) f analytique sur $C(0,0,1)$, donc

$$Res(f,0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z(z+1)} \quad , \gamma : \|z\| = r,\ 0 < r < 1.$$

$$Res(f,0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\frac{1}{z+1}}{z} dz = 1 \text{ (par F.I.C)}.$$

M_2) Le développement en série de Laurent de f sur $C(0,0,1)$ au voisinage de $z_0 = 0$:

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} z^n$$

alors $Res(f,0) = C_{-1} = 1$.

(A) Méthodes pratiques :

(a) si z_0 est un pôle simple de f, alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

(b) Si z_0 est un pôle d'ordre m de, alors

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} g^{(m-1)}(z) \text{ , avec}$$

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z).$$

③ Si z_0 est P.S.E de f, $\text{Res}(f, z_0) = C_{-1}$ par le développement de Laurent en z_0 de f.

Exemple: $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$

$$\text{Res}(f,0) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0} g'(z), \quad g(z) = (z-0)^2 f(z) = \frac{1}{z+1}$$

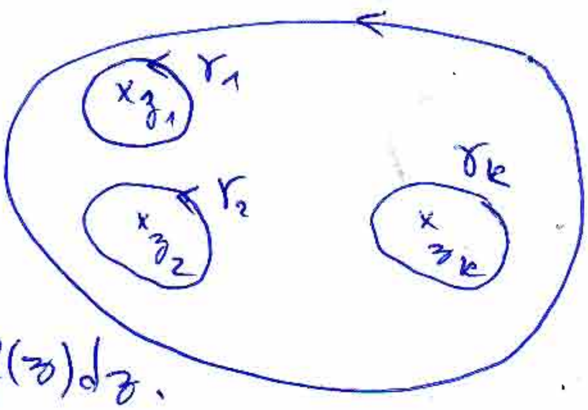
$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{-1}{(z+1)^2}\right) = -1$$

$$\text{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^2} = 1$$

Ⓑ Théorème de Résidues: Soit Ω une partie simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $z_1, z_2, \ldots, z_k$ des points isolés finies de Ω, et soit f une fonction méromorphe sur Ω, et soit γ un chemin fermé dans Ω autours $(z_i, 1 \leq i \leq k)$ au sense positif, alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \text{Res}(f, z_i)$$

Preuve:



Par F.I.C, on a

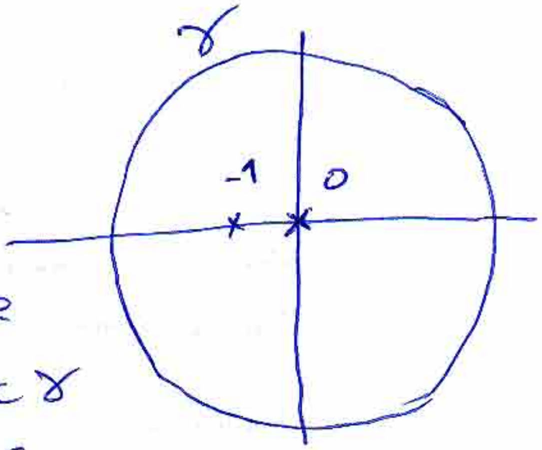
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{k}\int_{\gamma_i} f(z)\,dz$$

et on a $\text{Res}(f, z_i) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_i} f(z)\,dz$.

Exemple: par le théorème des Résidues calculer

$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz \ , \quad \gamma : \|z\| = 4$$

solution :



Les point S. de f sont $z_0 = 0$ (amovible) et $z_1 = -1$ un pole simple dans γ.

, f est méromorphe sur et à l'intérieur de γ, avec γ défini simplement connexe, donc par le théorème des Résidues on a :

$$\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i\left(Res(f,0) + Res(f,-1)\right).$$

$Res(f,0) = 0$

$Res(f,-1) = \lim_{z \to 0} (z+1) f(z) = 1 - e^{-1}$

donc $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i\left(0 + 1 - e^{-1}\right) = 2\pi i\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

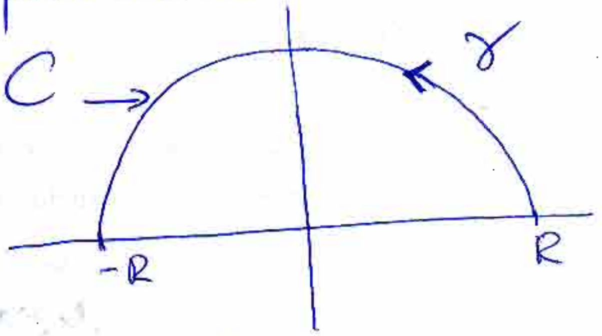
Exemple ② : Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} \ , \quad \gamma : \|z-1-i\| = 2.$$

③ Application du théorème des Residues.

① Calcule d'intégrale de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et on suppose en générale que γ est le chemin fermé formé par le segment $[-R, R] \subset (0x)$, et la moitie de cercle (C) superieur $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ de centre o et de rayon R. Quand $R \longrightarrow +\infty$, et par le lemme de Jordan suivante, on peut de calculer cet intégral.



Lemme de Jordan :

① s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ et $z = Re^{i\theta}$ et C le moitie de cercle precidente, alors $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_C f(z)\,dz = 0$

② s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tq $\| f(z) \| \leq \frac{M}{R^\alpha}$, alors $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_C e^{imz} f(z)\,dz = 0$

m un constant positif.

<u>Preuve</u> : ① $\left\|\int_C f(z)\,dz\right\| \leqslant \int_C \|f(z)\|\,\|dz\|$

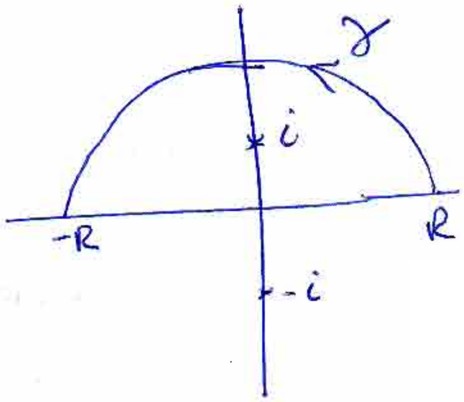
$$\leqslant \int_C \frac{M}{R^\alpha}\|dz\| = \int_0^{\pi} \frac{M}{R^\alpha} R\,d\theta = \frac{M}{R^{\alpha-1}}\pi$$

$R \longrightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_C f(z)\,dz = 0.$

Exemple : Calculer par la méthode du Residues l'integrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Soit $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ avec γ un chemin fermé

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2}$$



$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim (z-i)\frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}$$

donc $\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_C \frac{dz}{1+z^2} = \pi.$

Quand $R \to +\infty$: $\lim\left(\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2} + \int_C \frac{dz}{1+z^2}\right) = \pi.$

$$\|f(z)\| = \left\|\frac{1}{1+z^2}\right\| = \left\|\frac{1}{1+R^2e^{i2\theta}}\right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{R^2-1} \quad , \quad \|z_1+z_2\| \geqslant \|z_1\| - \|z_2\|$$

$$\leqslant \frac{2}{R^2}$$

d'aprés le lemme de Jordan ($M=2$, $\alpha=2$), alors $\lim_{R\to+\infty}\int_C \frac{dz}{1+z^2}=0$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$.

Exemple 2 :

Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}$.

Exemple 3 : Calculer $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$.

On pose $z=e^{i\theta}$, $\|z\|=1$, $\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$.

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}=-2i\int_{\|z\|=1}\frac{dz}{3z^2+10z+3}$$

la fonction $f(z)=\frac{1}{3z^2+10z+3}$ analytique sur $\mathbb{C}$ sauf en les points $z_1=-3$ et $z_2=-\frac{1}{3}$. On a z_2 à l'intérieur de $\|z\|=1$, avec z_2 est un pôle simple

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}=2\pi i\,\mathrm{Res}\left(f,-\frac{1}{3}\right)\cdot 2(-i)=4\pi\,\mathrm{Res}\left(f,-\frac{1}{3}\right)$$

$$\mathrm{Res}\left(f,-\frac{1}{3}\right)=\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left(z+\frac{1}{3}\right)f(z)=\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\frac{1}{3(z+3)}$$

$$=\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\frac{1}{3z+9}=\frac{1}{8}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}=\frac{\pi}{2}.$$