Chapitre 1 : Fonction d'une variable complexe

① **Rappelle** : L'ensemble des nombre complexe $\mathbb{C}$ est défini par

$$\mathbb{C} = \{z = x+iy, \text{ avec } x, y \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}.$$

ⓐ **Propriétes** : Soit $z = x+iy$ un nombre complexe

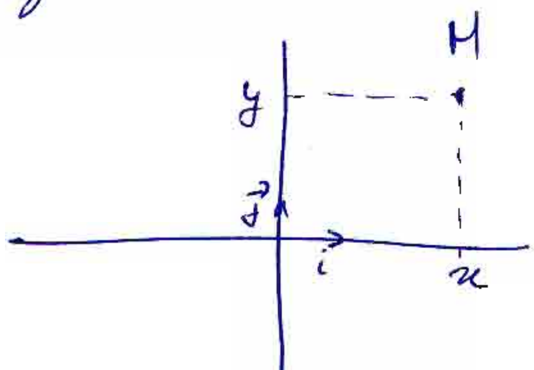
1) Le model de z est $\|z\| = \|x+iy\| = \sqrt{x^2+y^2}$

2) Le conjugue de z est $\bar{z} = x - iy$, avec

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = \|z\|^2.$$

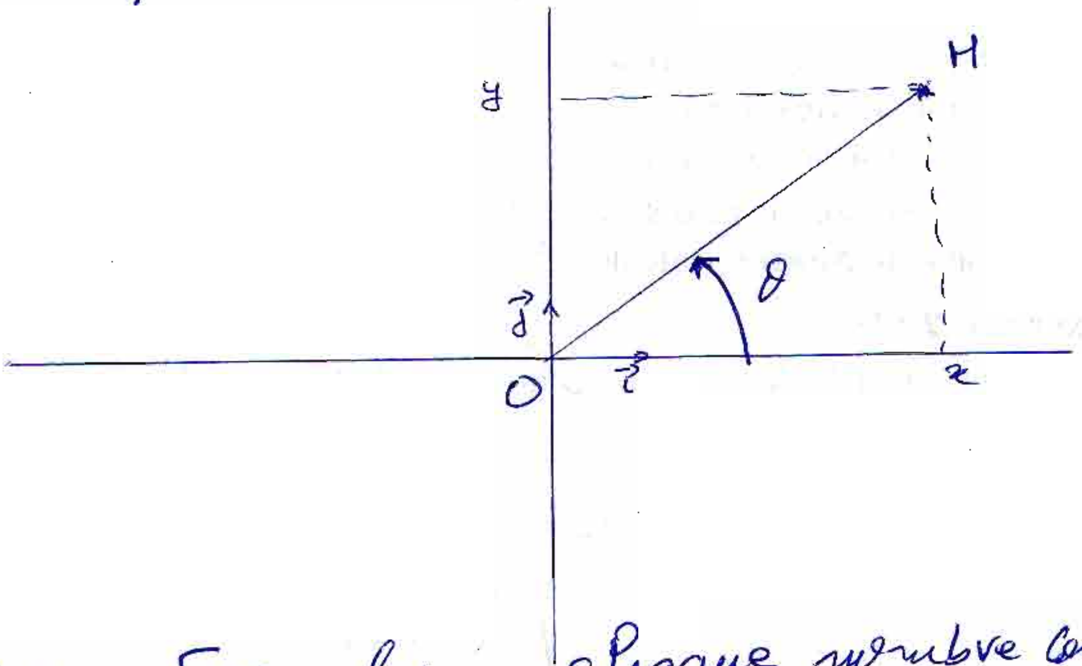
3) Si on consider $\mathbb{C}$ comme une espace vectorielle sur $\mathbb{R}$, on trouve $\dim \mathbb{C} = 2$, qui le même que $\mathbb{R}^2$ ($\dim \mathbb{R}^2 = 2$), donc on peut considérer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ sont les mêmes.

4) D'apres la remarque 3), on peut le représenté tout nombre $z \in \mathbb{C}$ par un point $M(x, y)$ dans le plan cartiziaune ($z = x+iy$).



(b) L'ecriture polaire de z est :

$z = \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec θ est l'argument de z noté par $\arg z$ (θ est l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{i}$)



(c) De Moivre Formul : chaque nombre complexe z peut etre ecrit sous la forme :

$z = \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta) = \|z\| e^{i\theta}$, avec $\theta = \arg z$.

(d) Racines d'un nombre complexe : On appelle n ieme racine de z le nombre $w \in \mathbb{C}$ avec $w^n = z$ ($n \in \mathbb{N}$).

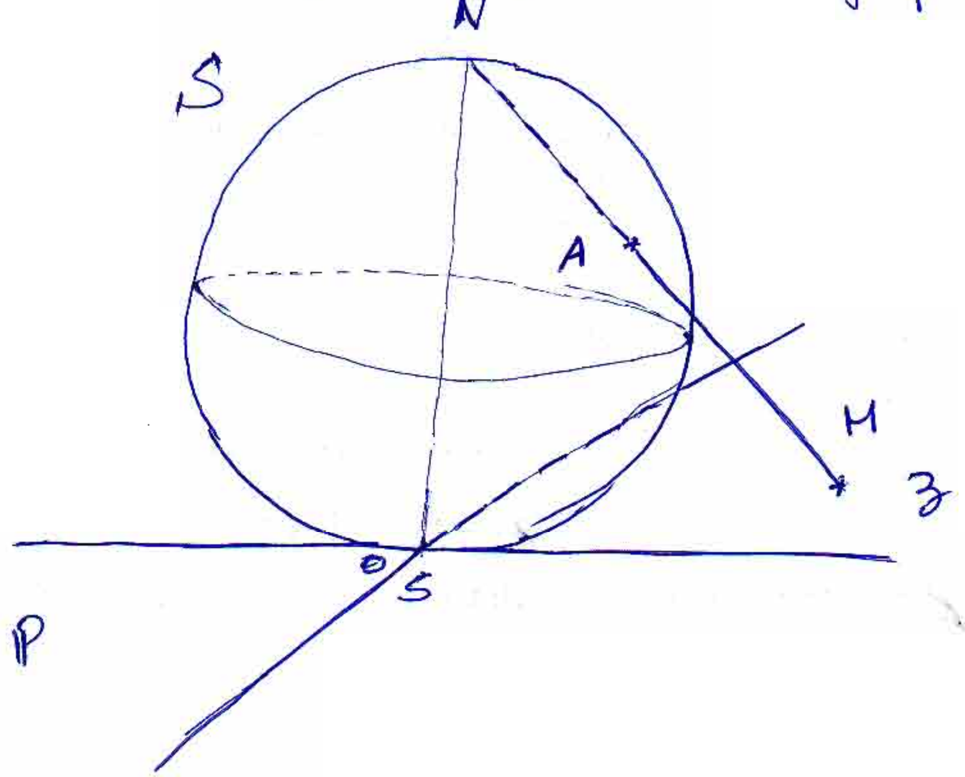
ou $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \left(\|z\| e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}} = \|z\|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$$= \|z\|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

donc il y a n racines de z qui satisfait l'equation $w^n = z$

(e) $z^k = \left[\|z\|(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^k = \|z\|^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))$
$= \|z\|^k e^{ik\theta}$, $k \in \mathbb{N}$ et $\theta = \arg z$.

(f) Représentation sphérique, projection stéréographique



Soit $\mathbb{P}$ le plan complexe et S le sphère unité (de rayon $r = 1$) avec $s, N \in S$ et $s \in \mathbb{P}$ avec $s = 0$.

<u>Exemple</u> : Les solutions de l'equation $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, dits les racines de l'unité, et on a :

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

donc l'ensemble de tous les racines de l'unite est

$$R_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}.$$

<u>Remarque</u> : Il n'existe pas une ralation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$, Contrairement au Cas de $\mathbb{R}$.

(2) Fonctions holomorphes.

(a) Dérivation et différentielles:

<u>Définition</u> : une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie au voisinage d'un point z_0 est dite dérivable en z_0 s'il existe un nombre noté $f'(z_0) \in \mathbb{C} \neq \infty$, tel que

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z_0)}{h} .$$

f est dite différentiable en z_0 s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ avec $\varepsilon(\cdot) \underset{\cdot \to 0}{\longrightarrow} 0$ telle que, pour h de module assez petit

$$f(z+h) = f(z) + h f'(z_0) + h\varepsilon(h)$$

<u>Remarque</u> : Cette notion identique à celle de $\mathbb{R}$, beaucoup plus forte que son analogue reel, car $hf'(h)$ désigne la multiplication complexe de $f'(z)$ et h et non au sens des applications linéaires.

<u>Exemples</u> :

(*) La fonction $f(z) = z^2$ est dérivable sur $\mathbb{C}$ et $f'(z) = 2z$

En effet : soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2z+h)}{h} = 2z.$$

(*) De façon plus général, comme dans $\mathbb{R}$, les fonction polynomiales ou rationnelles sont dérivable. avec les même les règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

(*) La fonction $g(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point.

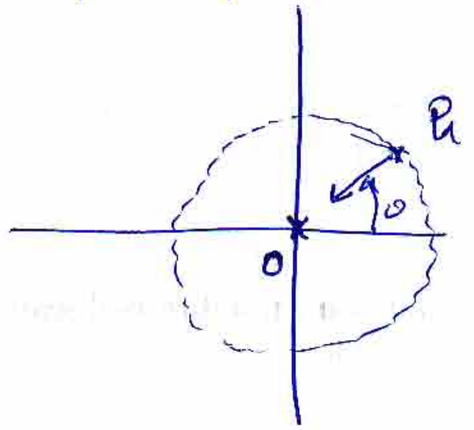
En effet :

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\|h\| e^{-i\theta}}{\|h\| e^{i\theta}}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^{-i2\theta} = e^{-i2\theta} \text{ (n'est pas unique)}.$$

Quand $h \to 0$, $\|h\| \to 0$
mais $\arg(h) = \theta$ ne dépend pas par $\|h\|$.



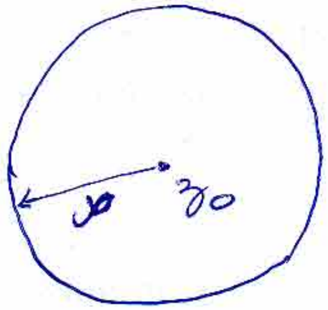
Proposition : Soient $z_0 \in \mathbb{C}$,
g et f deux fonction dérivable réspectivement en z_0 et $g(z_0)$, alors $f \circ g$ est dérivable en z_0 et :

$$(f \circ g)'(z_0) = (f' \circ g)(z_0) \cdot g'(z_0).$$

Proposition : soient $w_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction dérivable en w_0. On suppose de plus que f est inversible sur un voisinage de w_0 et que $f'(w_0) \neq 0$.
Alors f^{-1} est dérivable en $z_0 = f(w_0)$ et :

$$(f^{-1})'(z_0) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(z_0)}.$$

Définition (Holomorphe) : Soient U un boule ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur U. On dit que f est holomorphe sur U si f est dérivable en tout point de U.



une boule ouvert de rayon ρ et de centre z_0 est l'ensemble des elements $z \in \mathbb{C}$ avec $\|z - z_0\| < \rho$, i.e

$$U = B_\rho(z_0) = \{ z \in \mathbb{C}, \|z - z_0\| < \rho \}.$$

une Boule fermé $B_\rho(z_0)$ est

$$\overline{B}_\rho(z_0) = \{ z \in \mathbb{C}, \|z - z_0\| \leq \rho \}.$$

③ Conditions de Cauchy Riemann.

une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut être vue comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x + iy).$$

On peut donc parler de différentielle et de dérivées partielles de f par rapport à x et y. En général une fonction dérivable est différentiable, mais l'inverse n'est pas toujours vrais.

Proposition : Conditions de Cauchy Riemann

Soit f une fonction définie au voisinage de z_0. Les 2 assertions suivantes sont équivalentes (notons $f(z) = f(x,y)$)

① f est dérivable en z_0.

② f est $\mathbb{R}^2$-différentiable en z_0 et on a en ce point les conditions de Cauchy Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

de plus $$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Démonstration :

① ⇒ ② : supposons f dérivable en $z_0 = (x_0, y_0)$

$$f'(z_0) = \lim_{H\to 0}\frac{f(z_0+H) - f(z_0)}{H} = \lim_{H\to 0}\frac{f(x_0+iy+H) - f(z_0)}{H}$$

(*) si $H = h \in \mathbb{R}$, on a donc

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h+iy_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

(*) si $H = ih$, $h \in \mathbb{R}$:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y+h) - f(x_0,y_0)}{ih} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

donc $$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0.$$

<u>Lemme</u> : Soit $f(x,y) = U(x,y) + i\,V(x,y)$

avec U et V sont les parties réelles et imaginaires de f

Donc les conditions de Cauchy Riemann sont :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

<u>Exemple</u> : Soit $f(z) = \bar{z} = x - iy = f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-iy) - (x-iy)}{h}$$

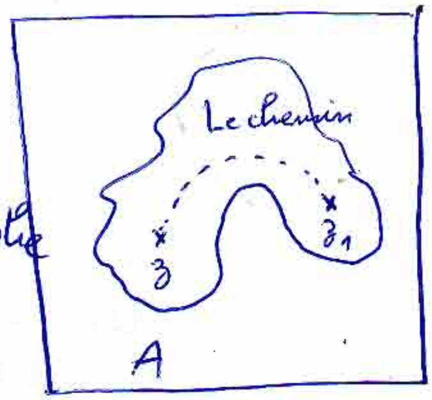
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x - iy - i\quad - (x-iy)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-ih}{h} = -i$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

<u>Définition</u> : une partie A de $\mathbb{C}$ dite connexe par arcs, si tout couple de points de A est relié par un chemin dans A.



<u>Définition</u> : Tout connexe par arcs est connexe

<u>Lemme</u> : Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, si $f' = 0$ sur U, alors f est constante

(4) Fonction élémentaires

(*) Fonctionspolynomiale : définie par

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k \ , \quad \alpha_k \in \mathbb{C} \ , \ n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha_0 \neq 0$$

P polynôme de dégré n.

(*) Fonctions rationnelle : soit P, Q deux polynômes.

la fonction $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ dite f. rationnelle.

(*) Fonction exponentielle : $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

(*) F. Trigonométrique :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ , \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

(*) $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$; (*) $\csc = \dfrac{1}{\sin z}$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \ , \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}$$

<u>Remarque</u> : Le plupart des propiétes des fonctions trigonométrique sur $\mathbb{R}$ sont valable dans $\mathbb{C}$.

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(-z) = -\sin z$

$\cos(-z) = \cos z$.

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

(*) Fonctions hyperbolique : $\sinh = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, (*) $\cancel{\operatorname{sech} z = \dfrac{1}{\cosh z}}$

$\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$, $\coth = \dfrac{1}{\tanh}$

Chapitre 2 : Théorème de Cauchy.

(1) Fonctions multiforme :

(a) Fonction logarithmique : On définie la fonction logarithmique d'une variable complexe z comme la fonction inverse de e^{z} par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \; \ln z = \ln\|z\| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

avec $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

Propriétés :

(*) $\ln z$ est une fonction multiforme.

(*) On pose $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

$\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, avec

$Re(\ln z) = \ln r \qquad Im(\ln z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(*) On pose $k=0$, On a la fonction définie par :

$$\operatorname{Ln} z = \ln\|z\| + i \operatorname{Arg} z \quad , \quad -\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$$

appelée la détermination principal de logarithme qui est une fonction uniforme.

(*) Soient $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$ et $-\pi \leq \theta \leq \pi$, et soit $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta)$.
si la formule de cauchy Riemann est verifiée, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = -r\frac{\partial Q}{\partial r}$$

Cette formule dite : F. C. R dans les coordonnées polaires.

(*) On a la determination principal de log dans les coordonnées polaires est $Ln z = Ln r + i\theta$, $\theta = Arg(z)$.

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 = -r \frac{\partial Q}{\partial r}$$

donc $Ln z$ est une fonction holomorphe sur $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, et on a : $e^{Ln z} = z = Ln e^{z}$, alors.

$$(Ln z)' = \frac{1}{e^{Ln z}} = \frac{1}{z}.$$

(2) L'intégration des fonctions complexes :

<u>Définition</u> : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une application avec $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $a < b$. On dit que γ est de classe C^1 par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une partition

$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b$ avec

γ admet une prolongement par continuité de classe C^1 sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n$.

<u>Déffinition</u> : soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a<b)$.
On appele chemin dans D chaque application $\gamma : [a,b] \to D$ verifier ⊛ γ ~~de~~ class C^1 par morceaux sur $[a,b]$.
⊛ γ injective.

<u>Remarque</u>

⊛ $\gamma(a)$ est l'origine et $\gamma(b)$ est l'extrémité de γ.

⊛ si $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ est une chemin fermé.

⊛ On suppose que γ dans le sense positive, alors γ^- est le chemin dans le sense inverse sur le ~~m~~ support de γ.

<u>Exemple</u>

⊛ le cercle de centre w et de rayon $R>0$ définie par

$$\gamma_{w,R} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma_{w,R}(t) = w + Re^{it}.$$

② Le segement $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = (1-t)\alpha + t\beta.$$

Ⓐ L'intégral d'une fonction complexe sur un chemin.

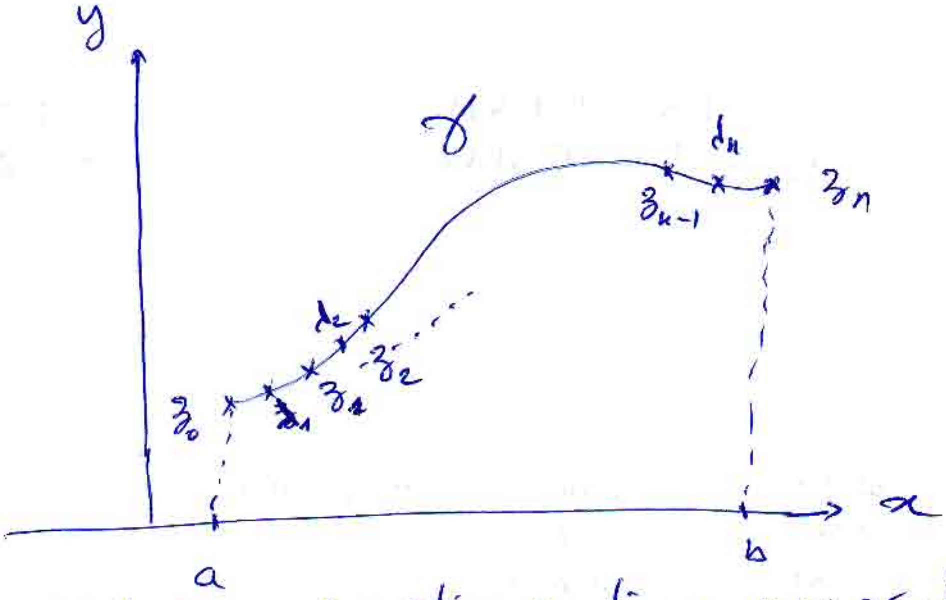
soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin, f une fonction complexe définie en chaque point de γ.

soit $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ une partition de γ avec $\gamma(a) = z_0$ $\gamma(b) = z_n$ et soit $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n \in \mathbb{C}$ avec

$\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $d_k \in]z_{k-1}, z_k[$, on dit que f est intégrable sur γ si

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(d_k)(z_k - z_{k-1}) = l < \infty, \text{ et on ecrit}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = l$$



<u>Propriétés :</u> soit f une fonction continue sur γ, alors f est intégrable sur, et :

(*) si $f(z) = u + iv$, alors $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy).$$

(*) si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$; $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \gamma'(t)\, f(\gamma(t))\,dt = -\int_b^a \gamma'(t)\, f(\gamma(t))\,dt = -\int_{\gamma^-} f(z)\,dz.$$

Exemples :

(1) $f(z) = z$, $\gamma_{0,R} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto Re^{it}$ $\Rightarrow \gamma'(t) = iRe^{it}$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{2\pi}^{2\pi} \gamma'(t)\, f(\gamma(t))\,dt = \int_0^{2\pi} iRe^{it}.Re^{it}\,dt$$
$$= iR\int_0^{0} e^{i2t}\,dt = iR\left[\frac{e^{i2t}}{2i}\right]_0^{2\pi} = \frac{R}{2}\left[e^{i4\pi} - e^0\right] = 0.$$

② $f(z)=z$, $\gamma : [0,\frac{1}{4}] \to \mathbb{C}$ $\to \gamma'(t) = i2\pi R e^{i2\pi t}$.
$t \mapsto R e^{i2\pi t}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{\frac{1}{4}} i2\pi R e^{i2\pi t} . R e^{i2\pi t}\, dt = -R^2.$$

Définition: soit f une fonction complexe sur $D \subset \mathbb{C}$
On appele fonction primitive de f, tout fonction F holomorphe sur D vérifier $F' = f$ sur D.

Proposition: si F une fonction primitive de f sur D et $\gamma : [a,b] \to D$ un chemin dans D, alors:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Exemple: $f(z) = z$, $\gamma : [0,\frac{1}{4}] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = Re^{i2\pi t}$.
avec $\gamma(0) = R$, $\gamma(\frac{1}{4}) = iR$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \left[\frac{1}{2} z^2\right]_R^{iR} = -\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R^2 = -R^2$$

Définition: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma \subset D$.
On appele longueur de γ la valeur positive $l(\gamma)$
avec $l(\gamma) = \int_a^b \| \gamma'(t) \| dt$.

Exemple:
La longueur d'une cercle de centre z_0 et rayon $R>0$ dans le sens positive est $(\gamma(t) = z_0 + Re^{it})$

$$l(\gamma_{z,R}) = \int_0^{2\pi} \| iRe^{it} \| dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

(b) Inégalité de Darboux

<u>Proposition</u> : soit f une fonction intégrable sur γ de longueur L, si il existe $M = \sup_{\gamma} \|f\| < \infty$

alors $\left\| \int_{\gamma} f(z)\,dz \right\| \leq ML$

<u>Exemple</u> : $\left\| \int_{\gamma} (x^2 + iy^2)\,dz \right\| \leq \pi$, avec $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$

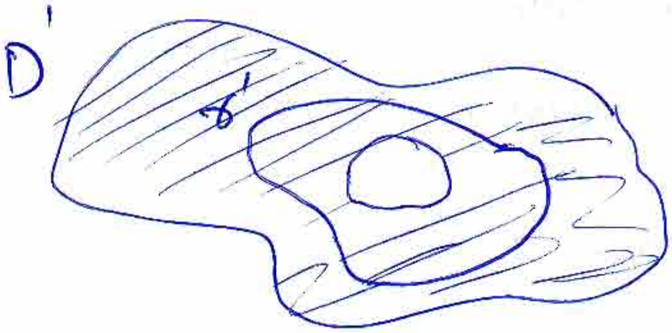
$\gamma(t) = e^{it}$, et $f(z) = x^2 + iy^2$

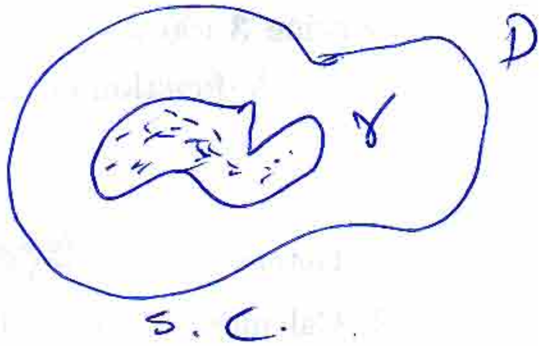
$\forall z \in \gamma : \| f(z) \| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\Rightarrow \sup_{\gamma} \|f\| \leq 1 \Rightarrow \left\| \int_{\gamma} f(z)\,dz \right\| \leq ML = L = \pi$

(c) Intégration d'une fonction Holomorphique sur un chemin.

<u>Déf</u> : soit D une partie de $\mathbb{C}$, on dit que D est simplement connexe, ssi, $\forall \gamma$ une chemin dans D, alors tout les points à l'intérieur de γ sont dans D.





S. C.

Sinon on dit que D est multiconnexe.

③ Théorème de Cauchy :

soit D une partie de $\mathbb{C}$ simplement connexe et f une fonction holomorphe sur D, et soit γ un chemin fermé inclue dans D, alors

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \quad \left(\oint_\gamma \text{ est l'intégrale sur un chemin fermé} \right).$$

Exemple : $\oint_{\gamma_{z_0,R}} z^2 dz = 0$.

<u>Resultat</u> : soit $D \subset \mathbb{C}$ un simplement connexe borné par γ un chemin fermé, alors si f holomorphe sur D et continue sur γ alors

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

<u>Exemple</u> :

$f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $D = \{z \in \mathbb{C},\ 1 < \|z\| < 3\}$.

et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $\gamma'(t) = i2e^{it}$.

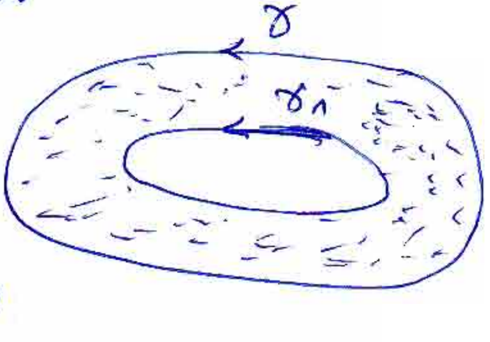
mais : $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{2e^{it}}}{\cancel{2e^{it}}}.dt = i2\pi \neq 0$.

<u>Proposition</u> : soit f une fonction holomorphe sur D simplement connexe, alors f admet une primitive F sur D.

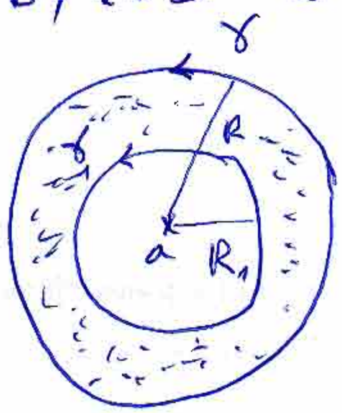
Ⓐ Théorème de Cauchy sur une partie multiconnexe

Soit D une partie multiconnexe borné par les chemin γ, γ_1 fermés de même direction, si f est holomorphe sur D et continue sur γ_1, γ, alors

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$



Exemple : $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$, $a \in \mathbb{C}$, et soit $\gamma(t) = Re^{it}+a$, $\gamma_1(t) = R_1 e^{it}+a$, $R > R_1$ 0, $t \in [0, 2\pi]$.



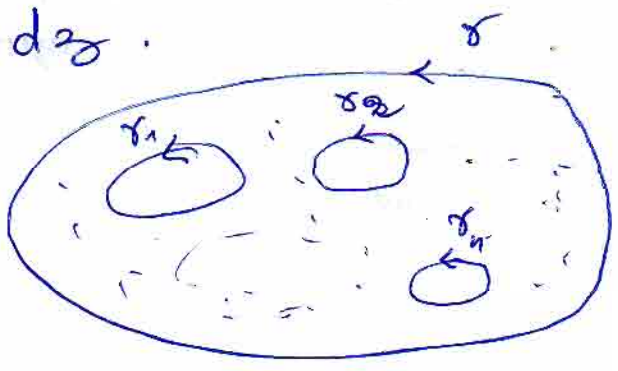
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}\,dt}{(Re^{it}+a)-a}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{iR_1 e^{it}}{(R_1 e^{it}+a)-a}\,dt = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i$$

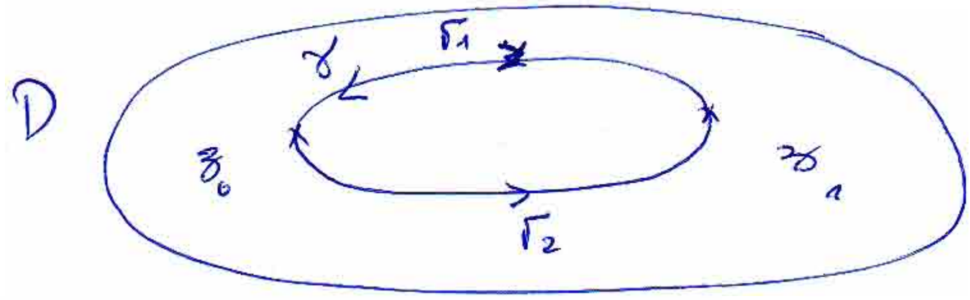
En général : si D est une partie multiconnexe éfinie par le chemin $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ fermés 2 à 2 disjoints et de même direction que γ, et f holomorphe sur D et continue sur $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, alors :

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$



Resultat : Soit D simplement connexe, et $z_0, z_1 \in D$.
Si f est holomorphe sur D, alors

$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ ~~est~~ indépendent ~~par qu~~ le chemin entre z_1, z_0



$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 = \int_{\Gamma_1^-} f(z)dz + \int_{\Gamma_2^+} f(z)dz$$

Ⓑ Formule intégrale de Cauchy.

Proportion :

Soit f holomorphe sur D simplement connexe, et $z_0 \in D$, et γ un chemin fermé dans D contenant z_0, on a

$$\boxed{2\pi i f(z_0) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \ (F.I.C)}$$

Preuve : $\frac{f(z)}{z-z_0}$ est holomorphe sur $D - \{z_0\}$, et d'après le théorème, si γ_1 est le cercle de centre z_0 et de rayon ε, alors :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})\, i\varepsilon e^{it}}{(z_0+\varepsilon e^{it})-z_0} dt.$$

$$= i \int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it}) dt.$$

et comme f est continue sur D, alors

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} i\int_0^{2\pi} f(z_0+\varepsilon e^{it})\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0)\,dt = 2\pi i\, f(z_0).$$

Exemple: Par^o la F.I.C, l'intégrale:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i e,\quad \gamma(t)=e^{it}+1,\ 0\leq t\leq 2\pi,\ f(z)=e^z,\ z_0=1$$

en effet: $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i e$

Proposition: Soit D simplement connexe, et f de classe C^∞ sur D, et γ chemin fermé contenant z_0 dans D, alors

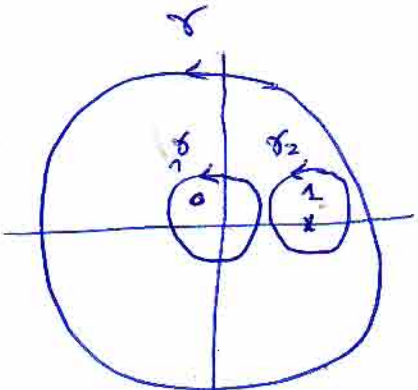
$$\boxed{\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\, f^{(n)}(z_0)}\quad \text{(F.I.C d'ordre n)}$$

Exemples

* $\gamma(t)=e^{it}$ $(\|z\|=1)$, $0\leq t\leq 2\pi$.

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(e^{iz}\right)''\Big|_{z_0=0} = \frac{2\pi i}{2}(i.i) = -i\pi.$$

* $\gamma = 2e^{it}$ $(\|z\|=2)$, $0\leq t\leq 2\pi$



$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)} = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-1)}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z-1)}\,dz$$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{z-1}\,dz$$

$$\left(\frac{e^{z}}{z-1}\right)\Bigg|_{z_0=0}=\frac{1}{-1}\ ,\ \left(\frac{e^{z}}{z}\right)\Bigg|_{z_0=1}=\frac{e}{1}.$$

par F.I.C : $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z}}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{-1}\right)+2\pi i\left(\frac{e}{1}\right)$

$$=2\pi i\,(e-1).$$

ⓒ Théorème de Morera :
si f continue sur D simplement connexe, et si $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz=0$ pour chaque γ fermé dans D, alors f holomorphe sur D.

ⓓ Inégalité de Cauchy :
Soit f holomorphe sur et à l'intérieur du $\gamma : \|z-z_0\|=r$, $r>0$ et $z_0\in\mathbb{C}$, alors

$$\|f^{(n)}(z_0)\|\leq \frac{M}{r^n}\,n!\ ,\ n\in\mathbb{Z}\ ,\ M=\max_\gamma|f(z)|$$

Preuve : A partir de la forme intégale de Cauchy

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}=f^{(n)}(z_0)$$

$$\|f^{(n)}(z_0)\|=\frac{n!}{2\pi}\left\|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right\|$$

$$\leq\frac{n!}{2\pi}\int_\gamma\frac{\|f(z)\|}{\|z-z_0\|^{n+1}}\,\|dz\|$$

$$\leq\frac{Mn!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\,dt}{r^{n+1}}=\frac{Mn!}{2\pi r^n}\cdot 2\pi=\frac{Mn!}{r^n}.$$

avec $M=\max_\gamma\|f(z)\|$.

(E) Théorème de Liouville :
Soit f une fonction entière et bornée, i.e.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $\|f(z)\| < M$,

Alors f est constante sur $\mathbb{C}$.

Démonstration :
On suppose $n = 1$ dans l'inégalité de Cauchy

$\|f'(z_0)\| \leqslant \frac{M}{r}$, pour chaque $z_0 \in \mathbb{C}$

lorsque $r \longrightarrow \infty$: $\|f'(z_0)\| \leqslant 0$

$\Rightarrow \|f'(z_0)\| = 0 \Rightarrow f'(z_0) = 0 \Rightarrow f(z_0) = C$

$\Rightarrow \forall z_0 \in \mathbb{C}, f(z) = C.$

(F) Théorème : Le principe du maximum.
Soit f holomorphe et non constante à l'intérieur et sur γ un chemin fermé, alors $\|f(z)\|$ prend sa valeur maximal sur γ, i.e :

$\exists z_0 \in \gamma : \|f(z_0)\| = \max \|f(z)\|$

Théorème : Le principe du minimum.
si f holomorphe et non constante sur et à l'intérieure de γ chemin fermé et $f(z) \neq 0$
Alors f prend sa valeur minimum sur γ.

$\exists z_0 \in \gamma : \|f(z_0)\| = \min_{\gamma} \|f(z)\|$

Chapitre 3 séries entières - Séries de Laurent

<u>Remarque</u> : Touts les définition et le théorème dans les suite et les séries des fonctions réel restent valable dans les séries entières.

① Séries entières :

Définition : soit $z_0 \in \mathbb{C}$, tout séries de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

avec $a_n, z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ appelée série entière.

Rayon de convergence

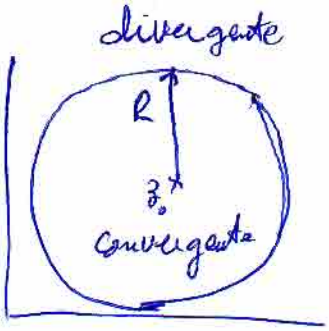
Définition : On appele rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ le nombre positif R qui vérifie :

ⓐ $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ absolument convergente dans le disque ouvert

$$D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C}, \| z - z_0 \| < R \}.$$

ⓑ $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ divergente sur $R < \| z - z_0 \|$.

<u>Remarque</u> : Si $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ converge seulement en z_0, alors $R = 0$



<u>Remarque</u> : si $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ converge sur $\mathbb{C}$, alors $R=\infty$

<u>Exemple</u> : $\sum_{n\geq 0} z^n = \sum_{n\geq 0} u_n$

En utilisant le critère d'Alembert :

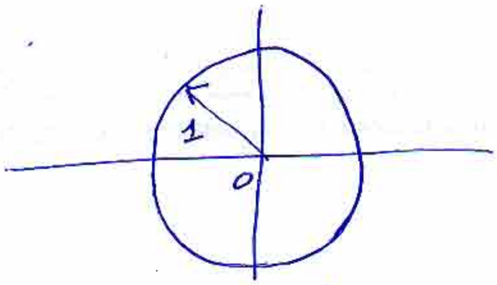
$\left\|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\| = \left\|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right\| = \|z\|$, si $\|z\|<1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} z^n$ est absolument convergente, sinon la série est divergente.

donc $R=1$

Définition : Le disque de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ est le disque

$$D(z_0,R)=\{z\in \mathbb{C}, \|z-z_0\|<R\}$$

Exemple : le disque de convergence de $\sum_{n\geq 0} z^n$ est $D(0,1)$.



Proposition : soit $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors :

$$R = \lim_{n\to\infty} \sup\left(\frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sup\left(\sqrt[n]{\|a_n\|}\right)}$$

si la limite existe.

<u>Remarque</u> : On a aucune resultat sur la frontière du $D(z_0,R)$ $(\|z-z_0\|=R)$.

Exemples:

ⓐ $\sum_{n\geq 0} \left(4+(-1)^n\right)^n z^n$

$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \limsup_{n\to\infty} \| 4+(-1)^n\| = 5$

donc $R = \frac{1}{5}$ et D.C est $D\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

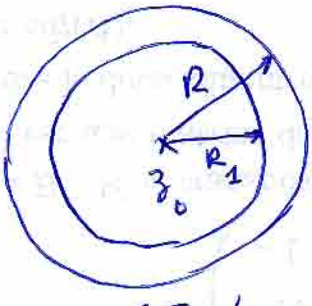
ⓑ $\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

$R = \limsup_{n\to\infty} \frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|} = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(2n)! \cdot ((n+1)!)^2}{(n!)^2 \cdot (2n+2)!} \right|$

$= \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \right| = \frac{1}{4}$

et le D. C est $D\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Proposition: La série $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ de rayon de convergence R est uniformement convergente sur le disque $D = \{ z \in \mathbb{C}, \|z - z_0\| \leq R_1 < R \}$.



Proposition:

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ une S.E de disque de convergence $D(z_0, R)$, et γ un chemin à l'interieur de $D(z_0, R)$; alors $\int_\gamma \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n dz = \sum_{n\geq 0} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n dz$

Proposition : soit $\sum a_n (z-z_0)^n$ une S.E de R.C. R, alors la fonction f définie par

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$$

est une fonction holomorphe sur $D(z_0, R)$ avec

$\forall z \in D(z_0,R)$, $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

et $f'(z_0) = 1 a_1 = a_1$

En général ; $\forall z \in D(z_0,R)$: $f^{(n)}(z_0) = a_n n!$, $\forall n \geq 0$.

donc $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$.

② Série de Taylor :

Définition : soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(z_0, r)$, $r>0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$, alors

$\forall z \in D(z_0,r)$: $f(z) = \sum_{n\geq 0} C_n (z-z_0)^n$,

avec $C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.

γ : un chemin fermé contenue dans $D(z_0,r)$, au direction positive, autour z_0. cette developement s'appele le developement de Taylor au voisinage de z_0

En effete : on a $\forall z \in D(z_0,r)$; $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$

et par formule intégale de Cauchy, on a

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = C_n .$$

Remarque : Le développement de Taylor est unique.

Exemple : $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $D_f = \mathbb{C}^*$, $z_0 = 1$.

On a f holomorphe sur $D(1,1)$, donc

$\forall z \in D(1,1)$; $f(z) = \sum_{n\geq 0} C_n (z-z_0)^n$

(M1) $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$

par récurrence : $\forall n \geq 0$: $f^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}$

$\Rightarrow C_n = (-1)^n (n+1)$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1)(z-1)^n$

(M2) On pose $Z = z - 1 \Rightarrow z = Z + 1$, donc

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(Z+1)^2} = \frac{-d}{dZ}\left(\frac{1}{1+Z}\right) = \frac{-d}{dZ}\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n Z^n\right)$$

$$= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} n Z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1) Z^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1)(z-1)^n .$$

Définition : Les fonctions qui possèdent le dev. de Taylor sur $\mathbb{C}$ s'appele fonction entière.

Dévelopement de Taylor des fonctions usuelles

au voisinage $z_0=0$:

$$e^z=\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!} \quad , R=\infty$$

$$\cos z=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , R=\infty$$

$$\sin z=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , R=\infty$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n \quad , R=1.$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n \quad , R=1$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geq 0}z^n \quad , R=1$$

$$\operatorname{ch} z=\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , R=\infty$$

$$\operatorname{sh} z=\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , R=\infty.$$

Proposition : si f une fonction entière, alors la série de Taylor de f en z_0 est convergente, et sa somme est $f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$