Centre universitaire Abdelhafid Boussouf – Mila
Institut de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
1ère année Master : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Contrôle Optimal et application en économie financière

Chapitre 1 : Introduction à la théorie de contrôle.

Présenté par :
AZI Mourad

April 21, 2025

Plan de cours

Introduction

- Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir à l'aide d'une commande.

Introduction

- Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir à l'aide d'une commande.
- La théorie du contrôle s'intéresse à l'analyse, à la conception et à la mise en œuvre de mécanismes permettant de réguler et de prédire la réponse du système à une entrée donnée, ainsi qu'à expliquer l'influence du contrôle sur la dynamique du système.

Introduction

- Généralement, la théorie du contrôle s'intéresse à :
  1. **La prédiction du comportement du système** : modélisation et analyse de la réponse du système ;

Introduction

- Généralement, la théorie du contrôle s'intéresse à :
    1. **La prédiction du comportement du système** : modélisation et analyse de la réponse du système ;
    2. **La contrôlabilité et l'observabilité du système** : la contrôlabilité est une propriété qui détermine si un système peut être amené, d'un état initial quelconque, à un état final désiré en un temps fini grâce à une commande appropriée ; l'observabilité détermine si l'état interne du système peut être estimé à partir des mesures disponibles sur ses sorties ;

Introduction

- Généralement, la théorie du contrôle s'intéresse à :
  1. **La prédiction du comportement du système** : modélisation et analyse de la réponse du système ;
  2. **La contrôlabilité et l'observabilité du système** : la contrôlabilité est une propriété qui détermine si un système peut être amené, d'un état initial quelconque, à un état final désiré en un temps fini grâce à une commande appropriée ; l'observabilité détermine si l'état interne du système peut être estimé à partir des mesures disponibles sur ses sorties ;
  3. **La stabilisation du système** : maintenir la stabilité malgré les perturbations ;

Introduction

- Généralement, la théorie du contrôle s'intéresse à :

  1. **La prédiction du comportement du système** : modélisation et analyse de la réponse du système ;
  2. **La contrôlabilité et l'observabilité du système** : la contrôlabilité est une propriété qui détermine si un système peut être amené, d'un état initial quelconque, à un état final désiré en un temps fini grâce à une commande appropriée ; l'observabilité détermine si l'état interne du système peut être estimé à partir des mesures disponibles sur ses sorties ;
  3. **La stabilisation du système** : maintenir la stabilité malgré les perturbations ;
  4. **L'optimisation des performances (Contrôle optimal)** : optimiser les performances du système en minimisant (ou maximisant) une certaine fonctionnelle tout en respectant des contraintes spécifiques ;

Introduction

- Généralement, la théorie du contrôle s'intéresse à :
  1. **La prédiction du comportement du système** : modélisation et analyse de la réponse du système ;
  2. **La contrôlabilité et l'observabilité du système** : la contrôlabilité est une propriété qui détermine si un système peut être amené, d'un état initial quelconque, à un état final désiré en un temps fini grâce à une commande appropriée ; l'observabilité détermine si l'état interne du système peut être estimé à partir des mesures disponibles sur ses sorties ;
  3. **La stabilisation du système** : maintenir la stabilité malgré les perturbations ;
  4. **L'optimisation des performances (Contrôle optimal)** : optimiser les performances du système en minimisant (ou maximisant) une certaine fonctionnelle tout en respectant des contraintes spécifiques ;
  5. **La robustesse et l'adaptation** : concevoir des contrôleurs capables de s'ajuster automatiquement en fonction des changements du système ou de l'environnement.

Plan de cours

Système de contrôle (Formalisation mathématique)

- Considérons un système dynamique de base :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

dont l'état est décrit par un vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (appelé variable d'état), x^0 étant l'état initial. Cette variable dépend du temps $t \in [0, t^*]$ et satisfait aux relations dites équations d'état, f étant une fonction vectorielle à n composantes $f_i,\ i = 1, \dots, n$, pouvant être linéaire ou non linéaire.

Système de contrôle (Formalisation mathématique)

- Considérons un système dynamique de base :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

dont l'état est décrit par un vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (appelé variable d'état), x^0 étant l'état initial. Cette variable dépend du temps $t \in [0, t^*]$ et satisfait aux relations dites équations d'état, f étant une fonction vectorielle à n composantes f_i, $i = 1, \ldots, n$, pouvant être linéaire ou non linéaire.

- Généralement, on souhaite agir sur le système (1) afin d'atteindre une cible ou un objectif donné. C'est pourquoi nous modifions le système (1) en introduisant une fonction (paramètre) $u(t) \in \mathbb{R}^r$ que l'on appelle commande, fonction localement intégrable définie sur $[0, t^*]$. Ainsi, nous obtenons le système de contrôle explicite, caractérisé par les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U. \quad (2)$$

Stratégies de contrôle d'un système dynamique

Pour contrôler un système dynamique, on distingue deux types de stratégies :

1. La stratégie en boucle ouverte

La stratégie en boucle ouverte consiste à chercher un contrôle admissible qui ne dépend pas de l'état du système. Cette stratégie est schématisée par la figure suivante :

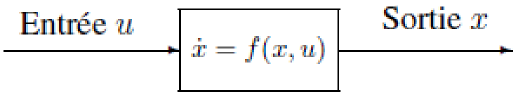

Figure: Commande en boucle ouverte

2. La stratégie en boucle fermée

Considérons un système donné par son équation d'état et un ensemble de commandes. Dans la stratégie en boucle fermée, la loi de commande *u* est déterminée en fonction du temps mais aussi de l'état *x*. Autrement dit, l'état du système est pris en compte à chaque instant afin de déterminer « en temps réel » la commande. Le contrôle ainsi obtenu est appelé feedback.
Cette stratégie peut se résumer par le schéma suivant :

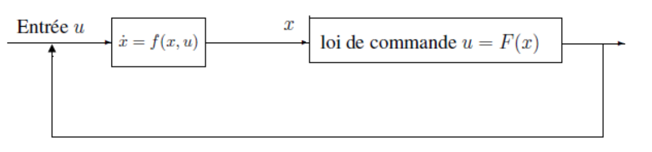

Figure: Commande en boucle fermée

Classe des commandes admissibles

Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des commandes admissibles, lequel peut être :

- non borné : $u(t) \in \mathbb{R}^r$ sans restriction ;

Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des commandes admissibles, lequel peut être :

- non borné : $u(t) \in \mathbb{R}^r$ sans restriction ;
- borné : Dans de nombreux problèmes de contrôle, on peut majorer et minorer les paramètres $u_j(t)$ ($1 \leq j \leq r$) par des constantes. Considérons, pour ce type de problème, la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est pratique de ramener les commandes à l'intervalle $[-1, 1]$. On peut remplacer u_j par v_j en posant
$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j,$$
ainsi v_j est également intégrable et on a $-1 \leq v_j \leq 1,\ j = 1, \ldots, r$.

Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des commandes admissibles, lequel peut être :

- non borné : $u(t) \in \mathbb{R}^r$ sans restriction ;
- borné : Dans de nombreux problèmes de contrôle, on peut majorer et minorer les paramètres $u_j(t)$ $(1 \leq j \leq r)$ par des constantes. Considérons, pour ce type de problème, la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est pratique de ramener les commandes à l'intervalle $[-1, 1]$. On peut remplacer u_j par v_j en posant
$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j,$$
ainsi v_j est également intégrable et on a $-1 \leq v_j \leq 1, \ j = 1, \ldots, r$.
- de type Bang-Bang : c'est un contrôle qui bascule brusquement entre deux valeurs, souvent utilisé pour contrôler un système acceptant une entrée binaire. En d'autres termes, un contrôle $u \in \mathbb{R}^r$ est dit bang-bang si, pour tout instant t et pour chaque indice $j = 1, \ldots, r$, on a $|u_j(t)| = 1$. Une commande bang-bang présente au moins un instant de commutation.

Plan de cours

Problème de contrôle optimal

- Soient $F : [0, t^*] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit alors le problème de contrôle optimal par :

$$\begin{cases} \max J(u) = G(x(t^*), t^*) + \displaystyle\int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0, \\ u \in U. \end{cases} \tag{3}$$

Problème de contrôle optimal

- Soient $F : [0, t^*] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit alors le problème de contrôle optimal par :

$$\begin{cases} \max J(u) = G(x(t^*), t^*) + \displaystyle\int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0, \\ u \in U. \end{cases} \tag{3}$$

- Dans le cas d'un problème de contrôle optimal linéaire, on a :

$$\begin{cases} \max J(u) = G(x(t^*), t^*) + \displaystyle\int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)\, dt, \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \\ u \in U, \end{cases}$$

avec A, B et r étant respectivement des matrices d'ordre $n \times n$, $n \times m$ et $n \times 1$.

Plan de cours

Exemple

Exemple 1.1

On considère un véhicule visant à atteindre l'origine en minimisant l'énergie appliquée. On considère les éléments suivants :

- **Équation du mouvement :** La dynamique du véhicule est décrite par l'équation différentielle :

$$m\,\ddot{y}(t) = u(t), \quad t > 0,$$

où $y(t)$ représente la position du véhicule et $u(t)$ la force appliquée.

Exemple 1.1

On considère un véhicule visant à atteindre l'origine en minimisant l'énergie appliquée. On considère les éléments suivants :

- **Équation du mouvement :** La dynamique du véhicule est décrite par l'équation différentielle :

$$m\,\ddot{y}(t) = u(t), \quad t > 0,$$

  où $y(t)$ représente la position du véhicule et $u(t)$ la force appliquée.

- **Conditions initiales et terminales :** On suppose que la position et la vitesse du véhicule sont connues à l'instant $t = 0$ et à l'instant T :

$$y(0) = x_0, \quad \dot{y}(0) = x_1, \quad y(T) = 0, \quad \dot{y}(T) = 0,$$

  où x_0 est la position initiale, x_1 la vitesse initiale et T le temps final.

Exemple 1.1

On considère un véhicule visant à atteindre l'origine en minimisant l'énergie appliquée. On considère les éléments suivants :

- **Équation du mouvement :** La dynamique du véhicule est décrite par l'équation différentielle :

$$m\,\ddot{y}(t) = u(t), \quad t > 0,$$

  où $y(t)$ représente la position du véhicule et $u(t)$ la force appliquée.

- **Conditions initiales et terminales :** On suppose que la position et la vitesse du véhicule sont connues à l'instant $t = 0$ et à l'instant T :

$$y(0) = x_0, \quad \dot{y}(0) = x_1, \quad y(T) = 0, \quad \dot{y}(T) = 0,$$

  où x_0 est la position initiale, x_1 la vitesse initiale et T le temps final.

- **Fonction de coût :** L'objectif est de choisir u de sorte que le véhicule rejoigne l'origine $(0, 0)$ en minimisant l'énergie totale dépensée :

$$\min J(u, T) = \int_0^T u(t)^2\, dt.$$

Exemple 1.1

- Si l'on pose $x_1 = y$ et $x_2 = \dot{y}$, où $(x_1(t), x_2(t))$ représente la position et la vitesse du véhicule à l'instant t, l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m} u(t), \end{cases} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Exemple 1.1

- Si l'on pose $x_1 = y$ et $x_2 = \dot{y}$, où $(x_1(t), x_2(t))$ représente la position et la vitesse du véhicule à l'instant t, l'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}\, u(t), \end{cases} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

Le problème de commande optimale consiste alors à trouver une fonction u permettant d'atteindre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en un temps T minimal :

$$\min J(u, T) = \int_0^T 1\, dt.$$

Exemple 1.2 – Gestion d'un barrage

Nous souhaitons maximiser la production d'énergie. Cette énergie dépend du débit d'eau turbinée et de la quantité d'eau.

- Soit $x(t)$ la quantité d'eau dans le barrage à l'instant t (en mètres cubes), $u(t)$ le débit d'eau turbinée (en mètres cubes par seconde) et $a(t)$ l'apport d'eau entrant dans le barrage (en mètres cubes par seconde).

Exemple 1.2 – Gestion d'un barrage

- **Équation d'état :** L'évolution de la quantité d'eau dans le réservoir est donnée par l'équation :

$$\dot{x}(t) = a(t) - u(t), \quad x(0) = x_0.$$

  - $\dot{x}(t)$ représente la variation de la quantité d'eau dans le réservoir ;
  - $a(t)$ est l'eau entrant dans le réservoir (apport externe) ;
  - $u(t)$ est l'eau turbinée (sortie).
- **Contraintes du système :**
  - La quantité d'eau dans le réservoir doit rester entre des limites sûres :

$$x_{\min} \leq x(t) \leq x_{\max}.$$

  - Le débit turbiné $u(t)$ doit respecter une contrainte de débit maximal :

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max}.$$

Exemple 1.2 – Gestion d'un barrage

- **Fonction de coût :** L'objectif est de maximiser la production d'énergie en turbinant l'eau, ce qui est représenté par la fonction de coût :

$$J = -\int_0^T c\,u(t)\,dt,$$

où c est une constante liée à l'efficacité du turbinage et T la période de contrôle.

- Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle u, le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

admet une solution unique $x : I \to \mathbb{R}^n$, absolument continue.
Soit $F : I \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, définie par :

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t), \quad F(0) = \mathrm{Id}.$$

- Notons que si $A(t) = A$ est constant sur I, alors $F(t) = e^{At}$. La solution $x(t)$ du système (4) associée au contrôle u est donnée par :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)F(s)^{-1}\Big(B(s)u(s) + r(s)\Big)ds,$$

pour tout $t \in I$.

Définition

Définition 1.1 (L'ensemble accessible)

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t^* > 0$ est défini par :

$$\mathrm{Acc}(x_0, t^*) = \{x_u(t^*) \mid u \in U\},$$

où $x_u(t)$ est la solution du système (4) associée au contrôle u. Autrement dit, $\mathrm{Acc}(x_0, t^*)$ est l'ensemble des points atteints par les trajectoires du système au temps t^*.

Définition

Définition 1.1 (L'ensemble accessible)

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t^* > 0$ est défini par :

$$\mathrm{Acc}(x_0, t^*) = \{x_u(t^*) \mid u \in U\},$$

où $x_u(t)$ est la solution du système (4) associée au contrôle u. Autrement dit, $\mathrm{Acc}(x_0, t^*)$ est l'ensemble des points atteints par les trajectoires du système au temps t^*.

Définition 1.2 (La contrôlabilité)

Un système de contrôle $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit contrôlable en temps t^* si $\mathrm{Acc}(x_0, t^*) = \mathbb{R}^n$.
Autrement dit, pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps t^*.

Théorème implicite de controlabilité

Théorème 1

Le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$$

est contrôlable en temps t^* si et seulement si la matrice

$$C(t^*) = \int_0^{t^*} F(t)^{-1}B(t)B(t)^T\left(F(t)^{-1}\right)^T dt, \tag{5}$$

appelée matrice de contrôlabilité, est inversible.

Plan de cours

Lemme 1.1

La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \phi : L^{\infty}([0, t^*], \mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{t^*} e^{(t^* - t)A} B\, u(t)\, dt \end{array}$$

est surjective.

Théorème 1.2 (Critère explicite de contrôlabilité)

Le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$$

est contrôlable en t^* si et seulement si la matrice

$$C = [B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B]$$

est de rang n. La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $\text{rang}(C) = n$ est appelée condition de Kalman.

Théorème 1.2 (Critère explicite de contrôlabilité)

Le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$$

est contrôlable en t^* si et seulement si la matrice

$$C = [B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B]$$

est de rang n. La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $\operatorname{rang}(C) = n$ est appelée condition de Kalman.

Remarque

La condition de Kalman ne dépend ni de t^* ni de x_0. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t^* depuis x_0, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

Théorème 1.3 (avec contrainte sur la commande)

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad u \in U.$$

Tout point de $\mathbb{R}^n$ peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la condition de Kalman est satisfaite pour la paire (A, B) et que toutes les valeurs propres de la matrice A ont une partie réelle négative ou nulle.

Plan de cours

Théorème 1.5 (Cas des systèmes linéaires non autonomes)

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \tag{6}$$

avec les fonctions $A(t)$, $B(t)$ et $r(t)$ supposées de classe C^∞ sur $[0, T]$. Définissons :

$$B_0(t) = B(t) \quad \text{et} \quad B_{k+1}(t) = A(t)B_k(t) - \dot{B}_k(t).$$

- S'il existe un $t \in [0, T]$ tel que

$$\text{rang}\,[B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n-1}] = n,$$

alors le système de contrôle (6) est contrôlable sur $[0, T]$.

Théorème 1.5 (Cas des systèmes linéaires non autonomes)

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \tag{6}$$

avec les fonctions $A(t)$, $B(t)$ et $r(t)$ supposées de classe C^∞ sur $[0, T]$. Définissons :

$$B_0(t) = B(t) \quad \text{et} \quad B_{k+1}(t) = A(t)B_k(t) - \dot{B}_k(t).$$

- S'il existe un $t \in [0, T]$ tel que

  $$\text{rang}\,[B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n-1}] = n,$$

  alors le système de contrôle (6) est contrôlable sur $[0, T]$.
- De plus, si les fonctions $A(t)$, $B(t)$ et $r(t)$ sont analytiques sur $[0, T]$, alors le système (6) est contrôlable si et seulement si, pour tout $t \in [0, T]$,

  $$\text{rang}\,[B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n-1}] = n.$$

Plan de cours

Exemple

Soit le système décrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

- cas

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit le système décrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

- cas

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- cas

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \alpha & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on utilise généralement le système linéarisé, partant du principe que la contrôlabilité du système linéarisé implique, de manière locale, celle du système non linéaire. En revanche, la non-contrôlabilité du système linéarisé n'implique pas nécessairement la non-contrôlabilité du système non linéaire. Considérons le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{7}$$

Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Définition 1.4

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (7) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps t^* depuis x_0 si $x_1 \in \mathrm{Acc}(x_0, t^*)$. Autrement dit, il existe un voisinage V de x_1 tel que $V \subset \mathrm{Acc}(x_0, t^*)$.

Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Théorème 1.6

Considérons le système (7) avec $f(x_0, u^0) = 0$.
On note

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u^0) \quad \text{et} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u^0).$$

Si

$$\text{rang}\,(B,\ AB,\ A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n,$$

alors le système est localement contrôlable au voisinage de x_0.