

Géométrie

Mounir Bouguebina

Table des matières

1	Géométrie Affine	2
1.1	Définition	2
1.2	Exemples	4
1.3	Sous-espace affine	4
1.4	Repère Affine	6
1.5	Parallélisme	7
1.6	Applications affines	9
1.7	Barycentres	10
2	Géométrie Euclidienne	11
2.1	Définition	11
2.2	Orthogonalité	14
2.3	Projection orthogonale et Symétrie	16
3	Courbes et Surfaces	19
3.1	Courbes paramétriques	19
3.2	Vecteur tangent, vitesse et accélération	20
3.3	Reparamétrisation	22
3.4	Courbure	24
3.5	Surfaces	27

Chapitre 1

Géométrie Affine

1.1 Définition

Soit E un espace vectoriel réel (qu'on peut supposer de dimension finie mais ce n'est pas nécessaire) et soit A un ensemble non vide. On veut faire de la géométrie sur A . Ses éléments seront donc appelés des points et notés $P, Q, \dots$. Les éléments de E sont des vecteurs et seront notés $u, v, \dots$.

Définition 1.1. *On dit que A est un espace affine de direction l'espace vectoriel E si il existe une application $\phi : E \times A \longrightarrow A$ bijective qui à un vecteur u et à un point P associe le point $Q = \phi(u, P)$ et qui vérifie :*

1. $\phi(v, \phi(u, P)) = \phi(u+v, P)$ et $\phi(\vec{0}, P) = P$ ($+$ est l'addition des vecteurs dans E).
2. $\phi(u, P) = P$ si et seulement si $u = \vec{0}$.
3. Pour tous $P, Q \in A$, il existe $u \in E$ avec $Q = \phi(u, P)$.

On a l'habitude de noter

$$\phi(u, P) = P + u$$

et l'application ϕ définit en quelque sorte une opération d'addition d'un point P et d'un vecteur u pour obtenir un autre point $Q = P + u = \phi(u, P)$. Avec cette notation les trois conditions de la définition deviennent

1. $(P + u) + v = P + (u + v)$ et $P + \vec{0} = P$.
2. $P + u = P$ si et seulement si $u = \vec{0}$.

3. Pour tous $P, Q \in A$, il existe $u \in E$ avec $Q = P + u$.

Exercice 1.2. Montrer que le vecteur u de la troisième condition est unique.

L'opération d'addition entre un point et un vecteur $Q = P + u$ permet aussi de définir une opération de soustraction entre deux points $Q - P = u$ qu'on note aussi $u = \overrightarrow{PQ}$ (remarquer que $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$). On peut donc dire qu'un espace affine A de direction l'espace vectoriel E est un espace dans lequel est définie une soustraction entre deux points quelconques Q et P . Le résultat de cette soustraction n'est pas un autre point mais plutôt un vecteur u dans E . Dans un espace affine l'addition de deux points n'a aucun sens. Remarquer aussi qu'un espace affine ne vient jamais seul. Il est toujours accompagné de son espace vectoriel directeur.

Exercice 1.3. Montrer que pour tout $u \in E$, on a une bijection

$$t_u : A \longrightarrow A$$

qui à P associe le point $t_u(P) = P + u$. C'est la translation de vecteur u .

Il existe une autre définition d'un espace affine :

Définition 1.4. On dit que A est un espace affine de direction l'espace vectoriel E si il existe une application $\psi : A \times A \longrightarrow E$ qui à deux points P, Q associe le vecteur $u = \psi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$ et qui vérifie :

1. Pour tous points $P, Q, R \in A$, on a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. C'est la relation de Chasles.
2. Pour tout choix d'un point $O \in A$, l'application $\psi_O : A \longrightarrow E$ qui à P associe $\overrightarrow{OP}$ est une bijection.

Ainsi A est un espace affine de direction E si à partir de deux points $P, Q \in A$, on peut fabriquer un vecteur $u = \overrightarrow{PQ}$ de E de telle sorte que si on choisit un point origine O alors tout autre point P s'identifie au vecteur $\overrightarrow{OP}$

$$P = \overrightarrow{OP}$$

Ceci permet en particulier de ramener l'étude de A (géométrie) à celle de E (algèbre linéaire). Remarquer aussi que si $Q = P + u$, alors on a $u = \overrightarrow{PQ}$.

Exercice 1.5. Montrer que les deux définitions d'un espace affine sont équivalentes.

Définition 1.6. La dimension d'un espace affine A est la dimension de son espace vectoriel directeur E . Une droite affine est un espace affine de dimension 1. Un plan affine est un espace affine de dimension 2.

1.2 Exemples

Soit E un espace vectoriel réel et prenons $A = E$ (les points sont donc les vecteurs). Alors $A = E$ est un espace affine de direction lui même. En effet on peut définir

$$\phi : E \times A = E \times E \longrightarrow A = E$$

par

$$\phi(u, v) = u + v$$

l'addition étant celle des vecteurs. On vérifie facilement que ϕ a les propriétés requises. On peut aussi définir

$$\psi : A \times A = E \times E \longrightarrow E$$

par

$$\psi(u, v) = v - u$$

Tout espace vectoriel est donc un espace affine sur lui même avec les opérations usuelles d'addition et de soustraction des vecteurs. Ainsi $\mathbb{R}^0 = \{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2, \dots$ sont tous des espaces affines.

Un autre exemple (un peu trivial) est celui de tout ensemble formé d'un seul élément (point) $A = \{P\}$. C'est un espace affine de direction l'espace vectoriel trivial $E = \{\vec{0}\}$. ϕ est définie ici par

$$\phi(\vec{0}, P) = P$$

et ψ est définie par

$$\psi(P, P) = \vec{0}$$

Mais notre exemple fondamental est donné par l'exercice suivant.

Exercice 1.7. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x + 1\}$ et soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et que A est un espace affine de direction E . Quelle est sa dimension ?

1.3 Sous-espace affine

Soit A un espace affine de direction l'espace vectoriel E . Soit B une partie de A .

Définition 1.8. B est un sous-espace affine de A si il existe un point $P \in B$ et un sous-espace vectoriel F de E avec

$$B = P + F = \{P + u, u \in F\}$$

En particulier B est non vide. La dimension de B est celle de F .

Exercice 1.9. Montrer que si $B = P + F$ alors $B = Q + F$ pour tout autre point Q de B . Le choix du point n'est donc pas important.

Exemples 1.10. 1. Soit $B = \{P\} \subset A$. On a $P = P + \vec{0}$. Donc $B = P + \{\vec{0}\} = B + F$ est un sous-espace affine de A de direction $F = \{\vec{0}\}$. La dimension de B est $\dim F = 0$.

2. Soit $A = E = \mathbb{R}^2$. Soit $B = \{(\alpha, 2 + 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. On a $P = (0, 2) \in B$ et $B = P + F$ avec $F = \{(\alpha, 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ engendré par exemple par $(1, 5)$. B est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1. C'est une droite affine.

Proposition 1.11. Soit B un sous-espace affine de A de direction $F \subset E$. Alors on a

$$B = \{\overrightarrow{QQ'}, Q, Q' \in B\}$$

Preuve. On sait qu'il existe $P \in B$ avec $B = P + F$. Donc $F = \{Q - P, Q \in B\} = \{\overrightarrow{PQ}, Q \in B\}$. Posons $G = \{\overrightarrow{QQ'}, Q, Q' \in B\}$. On a $F \subseteq G$. Inversement on a $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PQ'} = \overrightarrow{PQ'} - \overrightarrow{PQ} \in F$. Donc $G \subseteq F$. $\square$

Dans la pratique pour montrer qu'une partie B de A est un sous-espace affine on peut utiliser l'une des trois méthodes suivantes après avoir vérifié que B n'est pas vide :

1. Utiliser directement la définition.
2. Trouver $P \in B$ et montrer que $F = \{\overrightarrow{PQ}, Q \in B\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Montrer que $F = \{\overrightarrow{QQ'}, Q, Q' \in B\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 1.12. On dit que deux ou plusieurs points sont alignés s'ils appartiennent à une même droite (sous-espace affine de dimension 1).

Exercice 1.13. Soit $A = M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ et soit L l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1+a-b & 1 \\ a+b & b \end{pmatrix}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que A est un espace affine et que L est un sous-espace affine de A . Quelles sont leurs dimensions ?

Exercice 1.14. Soit $A = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ l'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles et soit $H = \{f \in A / f(x+1) = f(x) + 1\}$. Montrer que A est un espace affine et que H est un sous-espace affine de A . Quelles sont leurs dimensions ?

1.4 Repère Affine

Soit A un espace affine de dimension n et de direction l'espace vectoriel E . Soit $O \in A$ un point fixé (point origine) et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Alors tout point $P \in A$ peut s'écrire

$$P = \overrightarrow{OP} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ pour i allant de 1 à n . De plus on sait que pour tout i , il existe $P_i \in A$ tel que

$$e_i = \overrightarrow{OP_i}$$

et donc

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OP_n}$$

Ainsi les $n+1$ points $O, P_1, \dots, P_n$ permettent de déterminer tout autre point P de A .

Définition 1.15. On appelle repère affine de A tout couple $(O, \{e_1, \dots, e_n\})$ formé d'un point O de A et d'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E ou de manière équivalente la donnée de $n+1$ points $O, P_1, \dots, P_n$ de A de telle sorte que $\{\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}\}$ constitue une base de E .

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ sont les coordonnées cartésiennes du point P dans ce repère et on peut donc écrire

$$P = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Exercice 1.16. Soient dans $A = E = \mathbb{R}$ les points $P_0 = (0,0), P_1 = (3,0), P_2 = (2,1), P_3 = (2,-1)$ et $P_4 = (1,3)$. Montrer que $(P_0, \{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}\})$ est un repère affine de A . Soit $P = (4,5)$. Quelles sont les coordonnées cartésiennes de ce point dans ce repère ?

1.5 Parallélisme

Soit A un espace affine de direction E .

Définition 1.17. Soient B_1, B_2 deux sous-espaces affines de A . On dit que B_1 est parallèle à B_2 et on note $B_1 // B_2$ si B_1 et B_2 ont le même sous-espace directeur F

Ainsi B_1 et B_2 sont parallèles si on peut écrire

$$B_1 = P + F$$

avec $P \in B_1$ et

$$B_2 = Q + F$$

avec $Q \in B_2$.

Proposition 1.18. Si $B_1 // B_2$ et $B_1 \neq B_2$ alors $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Preuve. On sait que $B_1 = P_1 + F$ et $B_2 = P_2 + F$ avec $P_1 \in B_1$ et $P_2 \in B_2$. Supposons que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Soit $P \in B_1 \cap B_2$. On a alors $B_1 = P + F$ et $B_2 = P + F$ et donc $B_1 = B_2$. Contradiction. $\square$

La réciproque n'est pas vraie. Prenons par exemple $A = E = \mathbb{R}^3$. Si $B_1 = \{(x, y, z)/z = 0\}$ et $B_2 = \{(0, 0, 1)\}$, on a B_1 non parallèle à B_2 et $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Remarquer aussi qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour que deux sous-espaces affines soient parallèles est qu'il aient même dimension. Par exemple un point et une droite ne peuvent pas être parallèles.

Tout point P est parallèle à tout autre point Q . En effet on a

$$\{P\} = P + \{\vec{0}\}$$

et

$$\{Q\} = Q + \{\vec{0}\}$$

Exercice 1.19. Soient dans $A = E = \mathbb{R}^2$ les deux parties $B_1 = \{(\lambda + 1, 3\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $B_2 = \{(\lambda + 2, 3\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que B_1 et B_2 sont des sous-espaces affines parallèles.

Proposition 1.20. Soit A un espace affine de direction l'espace vectoriel E et soit $B \subseteq A$ un sous-espace affine de A de direction le sous-espace vectoriel F de E . Alors tout sous-espace affine de A parallèle à B est de la forme

$$B + v = \{Q = P + v, P \in B\}$$

pour v un vecteur dans E .

Preuve. Montrons d'abord que $B + v$ est un sous-espace affine de A . Soient Q, Q' deux points de $B + v$. On a donc $Q = P + v$ et $Q' = P' + v$ avec P, P' deux points de B . On a donc

$$\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = -v + \overrightarrow{PP'} + v = \overrightarrow{PP'} \in F$$

Ceci montre que $B + v$ est un sous-espace affine de A parallèle à B . Supposons maintenant que B' est un sous-espace affine de A parallèle à B . On a donc $B = P + F$ et $B' = Q + F$ et donc $B' = B + v$ avec $v = \overrightarrow{PQ}$ $\square$

La proposition suivante est l'analogie du cinquième postulat d'Euclide énoncé dans ses "éléments de géométrie". Ce postulat est donc valable dans tout espace affine.

Proposition 1.21. Soit A un espace affine de direction l'espace vectoriel E et soit B un sous-espace affine de A de direction le sous-espace F de E . Alors pour tout point $Q \in A$ il existe une unique sous-espace affine de A parallèle à B et contenant Q .

Preuve. Soit $B = P + F$. Si $v = \overrightarrow{PQ}$ alors $B' = B + v$ est un sous-espace affine de A contenant Q parallèle à B ($Q = P + \overrightarrow{PQ}$). Montrons qu'il est unique. Soit B'' un autre sous-espace affine contenant Q et parallèle à B . On sait que $B'' = B + v$ avec $v \in E$. Comme $Q \in B'$ et $Q \in B''$, on a $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ et $Q = P' + v$ avec P, P' deux points de B et donc $v = \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ}$. Soit $R \in B''$. Il s'écrit $R = P'' + v$ avec $P'' \in B$. Donc $R = P'' + \overrightarrow{P'P} + \overrightarrow{PQ} = P''' + \overrightarrow{PQ} \in B'$ avec $P''' = P'' + \overrightarrow{P'P} \in B$. Ceci montre que $B'' \subseteq B'$. Inversement soit $R \in B'$. On a $R = P'' + \overrightarrow{PQ} = P'' + v - \overrightarrow{P'P} = P''' + v \in B''$ avec $P''' = P'' + \overrightarrow{P'P} \in B$. Ceci montre que $B' \subseteq B''$. On a donc montré que $B' = B''$. $\square$

1.6 Applications affines

Soient A, B deux espaces affines de directions les espaces vectoriels E et F respectivement.

Définition 1.22. Une application $f : A \longrightarrow B$ est dite affine s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow F$ avec

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})$$

ou encore

$$f(Q) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})$$

Si $A = E$ et $B = F$ sont des espaces vectoriels une relation simple entre une application affine et son application linéaire associée. En effet si on identifie les points P et Q aux vecteurs u et v , on a $\overrightarrow{f(u)f(v)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{uv}) = \overrightarrow{f}(v - u)$ et donc $f(v) - f(u) = \overrightarrow{f}(v) - \overrightarrow{f}(u)$. En prenant $u = \vec{0}$, on obtient $f(v) - f(\vec{0}) = \overrightarrow{f}(v)$ et donc

$$f(v) = \overrightarrow{f}(v) + f(\vec{0})$$

Prenons $A = B$ et $E = F$. Soit $t_u : A \longrightarrow A$ la translation de vecteur $u \in E$ donnée par $t_u(P) = P + u$. Montrons que c'est une application affine. On a $\overrightarrow{t_u(Q)t_u(P)} = t_u(Q) - t_u(P) = (Q + u) - (P + u) = Q - P = \overrightarrow{PQ} = Id_E(\overrightarrow{PQ})$. Donc t_u est affine avec $\overrightarrow{t_u} = Id_E$. Pour un autre exemple soit $h_{O,k} : A \longrightarrow A$ l'homothétie de centre O et de rapport k donnée par $h_{O,k}(P) = O + k\overrightarrow{OP}$. Montrons que $h_{O,k}$ est affine. On a $\overrightarrow{h_{O,k}(P)h_{O,k}(Q)} = (O + k\overrightarrow{OP}) - (O + k\overrightarrow{OQ}) = k\overrightarrow{PQ} = kId_E(\overrightarrow{PQ})$. Donc $h_{O,k}$ est affine avec $\overrightarrow{h_{O,k}} = kId_E$ qui est une application linéaire. Remarquer que $t_{\vec{0}} = Id_A$ qui est donc une application affine et $\overrightarrow{Id_A} = Id_E$.

La composition de deux applications affines est affine. En effet on a $\overrightarrow{g \circ f(P)g \circ f(Q)} = \overrightarrow{g}(f(P)f(Q)) = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})) = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ})$. En particulier si $f : A \longrightarrow A$ est affine bijective alors son inverse f^{-1} est aussi bijective et on a $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$. Ce sont les transformations affines de A .

Définition 1.23. Soit A un espace affine de direction l'espace vectoriel E . Le groupe affine de A noté $GA(A)$ est l'ensemble des transformations affines de A . C'est un groupe pour l'opération de composition des applications avec Id_A comme élément neutre.

1.7 Barycentres

Soit A un espace affine de direction l'espace vectoriel E . Soient $P_1, \dots, P_k$ des points de A . Le point A_i est muni du poids α_i qui est un nombre réel. Le poids total des k points est $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i$. Alors il existe un unique point $G \in A$ tel que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$$

En effet soit $O \in A$ un point origine. Comme $\overrightarrow{GP_i} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP_i}$ par la relation de Chasles, l'équation précédente donne

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{p} \overrightarrow{OP_i}$$

ce qui détermine le point G de manière unique.

Définition 1.24. *Le point G est appelé le barycentre des points P_i munis des poids α_i . On le note*

$$G = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_k P_k$$

Si λ est un scalaire le barycentre des points P_i munis des poids α_i est le même que celui des points P_i munis des poids $\lambda \alpha_i$. On peut donc toujours supposer que le poids total $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i$ est égal à 1. Par exemple

$$G = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$$

est le milieu des deux points P_1 et P_2 . De même

$$G = \frac{1}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{3} P_3$$

est le centre de gravité du triangle $P_1 P_2 P_3$ formé par les trois points P_1, P_2 et P_3 .

La notion de barycentre est très importante dans un espace affine. Par exemple on peut montrer qu'une application est affine si elle preserve les barycentres.

Chapitre 2

Géométrie Euclidienne

La géométrie euclidienne est l'étude des espaces vectoriels réels de dimension finie munis d'un produit scalaire. Ce produit scalaire permet de définir les notions de longueur, distance et angle dans l'espace vectoriel. Ce chapitre présente les définitions de base et les principales propriétés de toutes ces notions. Chaque section du chapitre aura un certain nombre d'exercices dont la correction se fera dans un autre pdf accompagnant le cours.

2.1 Définition

Soit E un espace vectoriel réel (le corps des scalaires est $\mathbb{R}$).

Définition 2.1. *Un produit scalaire sur E est une application*

$$\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

possédant les propriétés suivantes :

1. $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$; $\phi(u, v_1 + v_2) = \phi(u, v_1) + \phi(u, v_2)$ et $\phi(\lambda u, v) = \phi(u, \lambda v) = \lambda \phi(u, v)$ pour tous $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\phi(u, u) \geq 0$ pour tout $u \in E$.
3. $\phi(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$
4. $\phi(u, v) = \phi(v, u)$

La première propriété exprime la bilinéarité de ϕ , la seconde exprime sa positivité et un synonyme de la troisième est de dire que ϕ est définie. La

dernière exprime la symétrie du produit scalaire. Les applications portant sur des vecteurs et ayant des valeurs dans $\mathbb{R}$ (et plus généralement dans le corps des scalaires) ont un nom : ce sont des formes. Ainsi un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E . Pour des raisons historiques le produit scalaire est souvent noté

$$\phi(u, v) = \langle u, v \rangle$$

notation que nous adopterons dans toute la suite. Remarquer que ϕ associe à deux vecteurs u et v un nombre réel ou encore un scalaire $\langle u, v \rangle$, d'où le nom de produit scalaire.

Exercice 2.2. Montrer que $\langle 0, u \rangle = 0$ pour tout $u \in E$ (le premier 0 est le vecteur nul dans E et le second 0 est le nombre réel (ou scalaire) 0).

Le produit scalaire sur E permet de définir une norme

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

par la formule

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

qui a un sens puisque $\langle u, u \rangle \geq 0$. Il permet aussi de définir une distance

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

par

$$d(u, v) = \|v - u\|$$

et l'angle θ entre deux vecteurs u et v sera lui donné par son cosinus

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

Le fait que cette formule soit exacte ($\cos(\theta)$ est compris entre -1 et 1) est assuré par l'exercice

Exercice 2.3. Montrer que $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Exercice 2.4. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E , c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés :

1. $\|u\| = 0$ si et seulement si $u = 0$.

2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ pour tous $u, v \in E$ (inégalité triangulaire).

Définition 2.5. Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Remarquer la condition de dimension finie dans cette définition. De plus dans un espace euclidien le produit scalaire et la norme sont intimement liés. On a vu que le produit scalaire définit la norme mais l'inverse aussi est vrai : ayant la norme on peut définir le produit scalaire comme le montre l'exercice suivant

Exercice 2.6. Montrer que dans un espace euclidien on a :

1. $4\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$.
2. $2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2$.
3. $2\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2$.

On sait que tout espace vectoriel E de dimension finie est isomorphe à un certain $\mathbb{R}^n$ avec n la dimension de E . Pour les exemples on se concentrera donc sur ceux-là.

Exemple 2.7. Dans $\mathbb{R}$ tout élément non nul peut être vu comme un vecteur base. Par exemple tout nombre réel λ (vecteur) peut s'écrire $\lambda = \lambda.1$ et le vecteur 1 devient une base de $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}$ est alors complètement déterminé par sa valeur en 1. En effet on a

$$\langle \lambda, \beta \rangle = \langle \lambda.1, \beta.1 \rangle = \lambda\beta\langle 1, 1 \rangle$$

Tout nombre réel positif non nul peut être choisi comme valeur de $\langle 1, 1 \rangle$. Le produit scalaire correspondant à la valeur $\langle 1, 1 \rangle = 1$ aura pour norme la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a

$$\|\lambda\| = \sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = |\lambda|$$

Exemple 2.8. Soient $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les deux vecteurs formant la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Tout autre vecteur $u = (u_1, u_2)$ s'écrit

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2$$

On vérifie facilement que la formule

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. On l'appelle le produit scalaire euclidien.

Ce dernier exemple se généralise facilement à $\mathbb{R}^n$ pour tout n . Un des buts du cours est de montrer que tout produit scalaire sur un espace vectoriel de dimension finie est euclidien. Autrement dit il est toujours possible de trouver une base dans laquelle le produit scalaire a une expression simple comme celle de l'exemple.

Définition 2.9. La matrice du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de l'espace vectoriel E (de dimension n) est la matrice $M = (a_{ij})$ avec

$$a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

Exercice 2.10. Montrer que $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_2 + u_2v_1$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Un espace affine euclidien est un espace affine A dont la direction E est un espace euclidien. En choisissant un point origine O dans A , chaque point P de A peut être identifié au vecteur $\overrightarrow{OP}$ de E . On peut donc définir la longueur d'un point et la distance entre deux points par les formules

$$\|P\| = \|\overrightarrow{OP}\|$$

et

$$d(P, Q) = d(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$$

2.2 Orthogonalité

Soit E un espace euclidien de produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

Définition 2.11. deux vecteurs non nuls u et v dans E sont dit orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$ (ce qui donne $\cos\theta = 0$ pour θ l'angle entre u et v). On note $u \perp v$. Si F est un sous-espace vectoriel de E son orthogonal est

$$F^\perp = \{v \in E \mid \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in F\}$$

Proposition 2.12. 1. pour tout sous-espace vectoriel F de E , $F^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel de E .

2. On a toujours $E = F \oplus F^\perp$.

Preuve. Démontrons la première assertion. On a $0 \in F^\perp$ puisque $\langle u, 0 \rangle = 0$ pour tout $u \in E$. Si $v \in F^\perp$ on a $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$ et donc $\lambda v \in F^\perp$. Enfin si $v_1 \in F^\perp$ et $v_2 \in F^\perp$, on a $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle = 0 + 0 = 0$. Ceci montre que $v_1 + v_2 \in F^\perp$. Donc $F^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de E . Concernant la seconde assertion l'écriture $E = F \oplus F^\perp$ veut dire que $F \cap F^\perp = \{0\}$ et $E = F + F^\perp$. Soit $u \in F \cap F^\perp$. Alors $\langle u, u \rangle = 0$ et donc $u = 0$. L'égalité $E = F + F^\perp$ se démontre par récurrence sur la dimension de F . Pour simplifier traitons le cas $\dim F = 1$. Soit u un générateur de F . Soit $x \in E$. Si $x \in F$ on a $x = x + 0 \in F + F^\perp$. Si $x \notin F$ le vecteur $v = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$ est dans $F^\perp$ et on a $x = u + v \in F + F^\perp$. $\square$

Définition 2.13. le vecteur $\text{proj}_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$ est appelé la projection orthogonale de v le long (ou dans la direction) de u .

Exercice 2.14. Montrer que $v - \text{proj}_u v$ est orthogonal à u .

Définition 2.15. Une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'un espace euclidien E est dite orthogonale si

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0$$

pour tout $i \neq j$ (les vecteurs de la base sont deux à deux orthogonaux). La base est dite orthonormale si de plus

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1$$

pour tout i (tous les vecteurs de la base sont de norme 1).

Les bases orthonormales sont très importantes car elles permettent de simplifier les calculs de manière considérable. En effet dans une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ orthonormale, le produit scalaire a une expression très simple :

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

si $u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$ et $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ et $n = \dim E$ (Autrement dit dans cette base le produit scalaire est euclidien). Nous allons montrer que tout espace euclidien a une base orthonormale.

Théorème 2.16. Tout espace euclidien E a une base orthonormale.

Preuve. On utilise le procédé de Gram-Schmidt. L'idée est de commencer avec une base quelconque de E et de la transformer jusqu'à obtenir une base orthonormale. Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de E avec n la dimension de E . On pose $u_1 = v_1$ et $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. La norme de e_1 est 1. On pose ensuite $u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2)$ et $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$. Le vecteur e_2 est aussi de norme 1 et est orthogonal à e_1 . On continue avec $u_3 = v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3)$ et $e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$. Les vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont orthogonaux et sont tous de norme 1. En général on pose $u_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \text{proj}_{u_j}(v_i)$ et $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$. On finit avec $u_n = v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \text{proj}_{u_j}(v_n)$ et $e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. La base $\{e_1, \dots, e_n\}$ est orthonormale. $\square$

Exemple 2.17. Soit $E = \mathbb{R}^2$. avec la base formée des deux vecteurs $v_1 = (3, 1)$ et $v_2 = (2, 2)$. On a $u_1 = v_1 = (3, 1)$ et $\|u_1\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Donc $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$. De même $u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) = (\frac{-2}{5}, \frac{6}{5})$ et $e_2 = (\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$.

Exercice 2.18. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire euclidien. On pose $v_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $v_2 = (0, 3, 1, -1)$. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par v_1 et v_2 .

1. Déterminer une base orthonormale de F .
2. Donner un système d'équations pour $F^\perp$.

2.3 Projection orthogonale et Symétrie

Soit E un espace euclidien et soit F un sous-espace de E . On sait que $E = F \oplus F^\perp$. Tout élément x de E s'écrit donc de manière unique

$$x = u + v$$

avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$.

Définition 2.19. L'application

$$p_F : E \longrightarrow E$$

donnée par $p_F(x) = u$ est appelée la projection orthogonale sur F .

C'est une application linéaire sur E d'image F et de noyau $F^\perp$. On a

$$p_F(x) = u \Leftrightarrow x - u \in F^\perp$$

Exercice 2.20. 1. Montrer que $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

2. On appelle distance de x à F le nombre $d(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\|$. Montrer que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

Exercice 2.21. Soit $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire euclidien et soit F son sous-espace vectoriel donné par les deux équations $x + y + z + t = 0$ et $x - y + z - t = 0$.

1. Déterminer $F^\perp$ et donner la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer $d(x, F)$ avec $x = (1, 1, 1, 1)$.

Définition 2.22. La symétrie orthogonale (par rapport à F)

$$s_F : E \longrightarrow E$$

est l'application linéaire égale à Id_F sur F et à $-Id_{F^\perp}$ sur $F^\perp$.

Si $x \in E$ avec $x = u + v$, ($u \in F, v \in F^\perp$), on a

$$s_F(x) = u - v$$

Cette application garde intacts les éléments de F et transforme les éléments $v \in F^\perp$ en leurs symétriques $-v$.

Exercice 2.23. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ et de son produit scalaire canonique. Soit le sous-espace $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.

1. Déterminer $F^\perp$.
2. Quelle est la matrice de s_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit A un espace affine euclidien de direction l'espace euclidien E . Soit B un sous-espace affine de A de direction le sous-espace vectoriel F de E . Soit $O \in B$ et soit $P \in A$. Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est dans $E = F \oplus F^\perp$. Il existe donc $u \in F$ et $v \in F^\perp$ tels que $\overrightarrow{OP} = u + v$. Soit Q l'unique point de B tel que $\overrightarrow{OQ} = u$. Ceci définit

$$p_B : A \longrightarrow A$$

donnée par $p_B(P) = Q$. C'est la projection orthogonale sur B .

Exercice 2.24. *Montrer que p_B est une application affine et que $\overrightarrow{p_B} = p_F$.*

On définit aussi la symétrie orthogonale (par rapport à B)

$$s_B : A \longrightarrow A$$

par $s_B(P) = Q$ avec Q le point correspondant au vecteur $u-v$ (si $\overrightarrow{OP} = u+v$).

Exercice 2.25. *Montrer que s_B est une application affine et que $\overrightarrow{s_B} = s_F$.*

Chapitre 3

Courbes et Surfaces

Ce chapitre introduit rapidement les courbes et les surfaces paramétriques (définies donc par un paramètre dans un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$). Comme son nom l'indique une courbe a une certaine courbure et l'un des buts de ce chapitre est de rendre cette notion compréhensible pour les étudiants. Outre sa définition on donnera également des formules pour la calculer. Une surface s'étudie en inspectant les courbes définies sur elles. C'est ainsi qu'on définira aussi différentes courbures sur la surface.

3.1 Courbes paramétriques

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (par exemple $I =]0, 2\pi[$ ou encore $I =]-\infty, +\infty[$).

Définition 3.1. *Une courbe paramétrique dans $\mathbb{R}^n$ est une application*

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

donnée par $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ et $\gamma_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions C^∞ (indéfiniment dérivable) pour $i = 1, \dots, n$.

Il y a deux conditions dans cette définition : l'intervalle I doit être ouvert et les fonctions γ_i doivent être dérivables ainsi que toutes leurs dérivées. La signification de la première condition apparaîtra un peu plus tard. La seconde est facile à comprendre : on va effectuer un certain nombre de calculs qui font intervenir des dérivées et il est naturel de supposer que ces dérivées existent. A vrai dire c'est l'image $C = \gamma(I)$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est la vraie courbe et γ

n'est qu'une paramétrisation de C (qui peut en avoir plusieurs). La courbe sera dite plane si $n = 2$ et sera dite gauche (ou spatiale) si $n = 3$. Ce sont essentiellement toutes les courbes qu'on va étudier dans ce chapitre.

Exemple 3.2. Soit $\gamma :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t, t^2)$. Ici $I =]-\infty, +\infty[$ est ouvert et $\gamma_1(t) = t, \gamma_2(t) = t^2$ sont C^∞ . L'image de I par γ est $C = \gamma(I) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ et γ est donc la paramétrisation de la parabole dans $\mathbb{R}^2$. Une autre paramétrisation possible de la même parabole est $\gamma(t) = (2t, 4t^2)$ sur le même intervalle I .

Exemple 3.3. Soit $\gamma :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t, \sqrt{t})$. Ce n'est pas une courbe paramétrique car $\gamma_2(t) = \sqrt{t}$ n'est pas dérivable en $t = 0$.

Exercice 3.4. Soit $\gamma : I =]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$.

1. Montrer que c'est une courbe paramétrique. Quelle est la courbe dans $\mathbb{R}^2$ représentée par cette paramétrisation.
2. Mêmes questions pour $I =]0, 4\pi[$ et $I =]-\infty, +\infty[$.

3.2 Vecteur tangent, vitesse et accélération

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique. Soit $P = \gamma(t_0)$ un point de la courbe avec $t_0 \in I$.

Définition 3.5. Le vecteur tangent en le point $P = \gamma(t_0)$ est le vecteur $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0))$. On l'appelle aussi le vecteur vitesse de la courbe en t_0 .

Le point $P = \gamma(t_0)$ est dit singulier si $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0)) = 0$. Sinon on dira que c'est un point régulier ou non singulier. La courbe sera dite régulière si elle n'a pas de point singulier.

Exemple 3.6. Soit $I =]-\infty, +\infty[$. Le vecteur vitesse de $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t, t^2)$ en tout t est $\gamma'(t) = (1, 2t)$. Ce vecteur n'est jamais nul et donc la courbe est régulière. Pour le même I et $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, on a $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ et la courbe aura un point singulier en le point $P = \gamma(0) = (0, 0)$.

Exercice 3.7. Quels sont les points singuliers des courbes de l'exercice 2.4 ?

Définition 3.8. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique. La fonction vitesse de la courbe est la fonction

$$|\gamma'| : I \longrightarrow [0, +\infty[$$

donnée par $|\gamma'| (t) = \|\gamma'(t)\|$, la norme du vecteur tangent provenant du produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3.9. Montrer que la vitesse de la courbe est nulle en un point si et seulement si ce point est singulier.

Un point singulier est donc un point en lequel la courbe s'arrête (sa vitesse est nulle). C'est un point en lequel il est difficile de dessiner le vecteur tangent. Ces points sont considérés comme pathologiques et on essaiera de les éviter dans ce cours (ne serait ce que pour ne pas diviser par 0). La condition que l'intervalle I soit ouvert vient de là. En effet si $I = [a, b]$ alors la courbe va commencer en $t = a$ et finir en $t = b$. Elle aura donc au moins deux points d'arrêt : au début et à la fin et aura donc au moins deux points singuliers.

Définition 3.10. Une courbe γ sera dite à vitesse unité si sa fonction vitesse est constante égale à 1 :

$$|\gamma'| = 1$$

La longueur du vecteur tangent en tout point de la courbe est donc constante égale à 1. Ces courbes seront très importantes pour définir la courbure d'une courbe. Il en existe beaucoup (par exemple $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$) et on va montrer que toute courbe régulière va admettre une paramétrisation qui est à vitesse unité.

Exercice 3.11. Montrer qu'une courbe à vitesse unité est régulière.

Définition 3.12. Le vecteur accélération de la courbe γ en tout t est sa seconde dérivée $\gamma''(t) = (\gamma_1''(t), \dots, \gamma_n''(t))$.

L'existence d'un tel vecteur est assurée par les conditions de la définition d'une courbe paramétrique. Ce vecteur (ou plus exactement sa longueur) sera utilisé pour définir la courbure.

Exercice 3.13. Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire euclidien (dans la base canonique). Soient deux vecteurs $u(t)$ et $v(t)$ dans $\mathbb{R}^n$ fonctions du paramètre t . Leur produit scalaire $f(t) = \langle u(t), v(t) \rangle$ est donc une fonction t .

1. Montrer que $f'(t) = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle$.
2. En déduire que pour une courbe à vitesse unité le vecteur tangent $\gamma'(t)$ et le vecteur accélération $\gamma''(t)$ sont toujours orthogonaux (pour le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$).

3.3 Reparamétrisation

Définition 3.14. Une reparamétrisation de la courbe $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une autre courbe $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

1. Il existe un difféomorphisme $h : J \rightarrow I$
2. $h'(u) > 0$ pour tout $u \in J$
3. $\beta = \gamma \circ h$, c'est-à-dire $\beta(u) = \gamma(h(u))$ pour tout $u \in J$.

Intuitivement β et γ représentent la même courbe. Difféomorphisme veut dire que h est dérivable bijective et que l'application inverse h^{-1} est aussi dérivable. La condition $h'(u) > 0$ assure que β et γ traversent la courbe dans le même sens.

Exemple 3.15. Soient les courbes paramétriques $\gamma : I =]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (t, t^2)$ et $\beta : J =]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\beta(u) = (u^3, u^6)$. Si on pose $h : J \rightarrow I$ donnée par $h(u) = u^3$ alors β est une reparamétrisation de γ . En effet h est clairement un difféomorphisme (remarquer le demi-intervalle) et $h'(u) = 3u^2 > 0$. Enfin on a bien $\beta = \gamma \circ h$.

Exercice 3.16. Montrer que si γ est régulière, toute reparamétrisation β de γ est aussi régulière.

Sur l'ensemble des courbes paramétriques on définit une relation en disant que β est en relation avec γ si et seulement si β est une reparamétrisation de γ .

Exercice 3.17. Montrer que cette relation est une relation d'équivalence (reflexive, symétrique et transitive).

Cette relation de reparamétrisation va nous permettre de donner la définition définitive d'une courbe

Définition 3.18. Une courbe dans $\mathbb{R}^n$ est une classe d'équivalence de courbes paramétriques dans $\mathbb{R}^n$.

La classe de la courbe paramétrique γ sera notée $[\gamma]$. On a

$$[\gamma] = \{\beta \mid \beta \Re \gamma\}$$

avec $\Re$ la relation de reparamétrisation. Dans la suite on va montrer que toute courbe paramétrique régulière va avoir une reparamétrisation par une courbe à vitesse unité. Ce résultat est primordial pour définir la courbure.

Définition 3.19. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière. La fonction longueur d'arc de γ en $t_0 \in I$ est la fonction $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du$$

$s(t)$ est la longueur de la courbe entre le point $\gamma(t_0)$ et le point $\gamma(t)$. Elle est nulle pour $t = t_0$, négative pour $t < t_0$ et positive pour $t > t_0$.

Exemple 3.20. Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ avec $r > 0$. Calculons $s(t)$ en $t_0 = 0$. On a $\gamma'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ et $|\gamma'(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r$. Donc $s(t) = \int_0^t r du = tr$. Par exemple pour $t = 2\pi$, on a $s(2\pi) = 2\pi r$ la longueur du cercle de rayon r .

Contrairement à cet exemple la fonction $s(t)$ est en général difficile à calculer (comme toute intégrale). Par définition même la dérivée de s se calcule facilement

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du = |\gamma'(t)|$$

En particulier on $\frac{ds}{dt} > 0$. Soit $J = s(I)$ l'image de I par s . Du cours d'Analyse on sait que J est aussi un intervalle ouvert et que $s : I \longrightarrow J$ est bijective. Elle a donc une fonction inverse $s^{-1} : J \longrightarrow I$.

Exercice 3.21. Montrer que s^{-1} est dérivable et que $(s^{-1})'(u) = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}$. En déduire que $(s^{-1})' > 0$.

On va utiliser s^{-1} pour reparamétriser γ .

Théorème 3.22. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière et soit s sa fonction longueur d'arc en $t_0 \in I$. Soit s^{-1} la fonction inverse de s sur $J = s(I)$. Alors $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $\beta(u) = \gamma(s^{-1}(u))$ est une reparamétrisation de γ . De plus β est une courbe à vitesse unité.

Preuve. On prend $h = s^{-1}$. D'après l'exercice 2.21 on sait que h est un difféomorphisme et que $h' > 0$. Par définition on a $\beta = \gamma \circ h$. Donc β est bien une reparamétrisation de γ . Montrons que β est à vitesse unité. Pour cela calculons sa fonction vitesse

$$\begin{aligned} |\beta'(u)| &= |(\gamma \circ s^{-1})'(u)| \\ &= |\gamma'(s^{-1}(u))(s^{-1})'(u)| \\ &= |\gamma'(s^{-1}(u)) \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}| \\ &= |\gamma'(s^{-1}(u)) \frac{1}{|\gamma'(s^{-1}(u))|}| \\ &= \frac{|\gamma'(s^{-1}(u))|}{|\gamma'(s^{-1}(u))|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ici on a utilisé le résultat de l'exercice 2.21 : $(s^{-1})'(u) = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}$ et l'égalité déjà vue $s'(t) = |\gamma'(t)|$ appliquée à $t = s^{-1}(u)$. $\square$

Cette reparamétrisation de γ est appelée la reparamétrisation par la longueur d'arc.

Exercice 3.23. On reprend les données de l'exemple 2.20. Déterminer la reparamétrisation par la longueur d'arc β de γ et vérifier que β est bien une courbe à vitesse unité.

3.4 Courbure

On peut maintenant définir la courbure d'une courbe régulière. Intuitivement c'est le changement de direction du vecteur tangent quand celui-ci passe d'un point à un autre de la courbe. Le changement d'un vecteur (ou d'une fonction) est codé par sa dérivée et donc ici par le vecteur accélération. La définition exacte est la suivante

Définition 3.24. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrique régulière. Si γ est à vitesse unité sa courbure est la fonction

$$\kappa_\gamma : I \longrightarrow [0, +\infty]$$

donnée par $\kappa_\gamma(t) = |\gamma''(t)|$ (la longueur du vecteur accélération par rapport au produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$). Si γ n'est pas à vitesse unité, sa courbure est $\kappa_\gamma(t) = \kappa_\beta(s(t)) = |\beta''(s(t))|$ avec β la reparamétrisation de γ par la longueur d'arc et s sa fonction longueur d'arc (on sait que β est à vitesse unité).

Remarquer que la courbure est une fonction positive et qu'elle change donc d'un point à un autre de la courbe. Elle ne concerne que les courbes régulières. On commence par regarder si la courbe est à vitesse unité ou non. Si elle l'est on utilise la première définition. Sinon on est obligé de passer par la reparamétrisation β .

Exemple 3.25. Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, t)$. On a

$$\gamma'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)$$

et donc $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout t . La courbe est à vitesse unité. On a

$$\gamma''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, 0)$$

et donc

$$\kappa_\gamma(t) = |\gamma''(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dans cet exemple la courbure est une fonction constante.

Exercice 3.26. On reprend les données de l'exemple 2.20 et de l'exercice 2.23. Calculer la courbure de la courbe γ .

Exercice 3.27. Soit $\gamma(t) = (t, 3t + 1)$ une droite dans $\mathbb{R}^2$ (pour $t \in \mathbb{R}$). Vérifier que sa courbure est nulle.

Pour une courbe qui n'est pas à vitesse unité, il est en général difficile de calculer la courbure en utilisant la définition (ce qui provient de la difficulté de calculer s et donc β). On va plutôt utiliser la

Proposition 3.28. Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe régulière. Alors on a

1.

$$\kappa_\gamma(t) = \left| \frac{1}{|\gamma'(t)|} \frac{d}{dt} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right|$$

2.

$$\kappa_\gamma(t) = \left| \frac{\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^2} - \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{|\gamma'(t)|^4} \gamma'(t) \right|$$

Preuve. 1. On a $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \beta'(s(t))$ pour β la reparamétrisation par la longueur d'arc. Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right) &= \beta''(s(t)) \cdot s'(t) \\ &= \beta''(s(t)) \cdot |\gamma'(t)| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma(t) &= \kappa_\beta(s(t)) = |\beta''(s(t))| \\ &= \left| \frac{1}{|\gamma'(t)|} \frac{d}{dt} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right| \end{aligned}$$

2. Posons $l(t) = |\gamma'(t)| = \sqrt{\sum_i \gamma_i'(t)^2}$. On a alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma'}{|\gamma'|} \right) = \frac{l\gamma'' - l'\gamma'}{l^2}$$

On a $l = \sqrt{m}$ avec $m = \sum_i \gamma_i'(t)^2$ et donc $l' = \frac{1}{2} \frac{m'}{\sqrt{m^2}} = \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{l}$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma(t) &= \left| \frac{1}{|\gamma'(t)|} \frac{d}{dt} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right| \\ &= \left| \frac{1}{l} \frac{d}{dt} \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \right| \\ &= \left| \frac{1}{l} \left(\frac{l\gamma''}{l^2} - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{l} \cdot \frac{\gamma'}{l^2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{\gamma''}{l^2} - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{l^4} \gamma' \right| \\ &= \left| \frac{\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^2} - \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{|\gamma'(t)|^4} \gamma'(t) \right| \end{aligned}$$

□

Exercice 3.29. *En utilisant ces formules calculer la courbure des courbes suivantes*

1. la droite $\gamma(t) = (t, at + b)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2. le cercle de rayon r , $\gamma(t) = (rsint, rcost)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Définition 3.30. *Le vecteur tangent unité de γ en t est*

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

On a $|T(t)| = 1$ pour tout $t \in I$ et $T(t) = \gamma'(t)$ si γ est à vitesse unité. En général T et γ' sont colinéaires et ont le même sens. Comme corollaire de la proposition, on obtient facilement une autre formule donnant la courbure

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{|T'(t)|}{|\gamma'(t)|}$$

3.5 Surfaces

Définition 3.31. *Une surface paramétrique est une application lisse (C^∞)*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (pour la topologie euclidienne).

Une telle application s'écrit donc $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_n(x, y))$ pour $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions C^∞ sur U et $(x, y) \in U$. Le plus souvent on va considérer des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ (et donc $n = 3$).

Exemple 3.32. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$. Ici $U = \mathbb{R}^2$ et $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = y$ et $f_3(x, y) = x^2 - y^2$ qui sont toutes des fonctions C^∞ .*

Exercice 3.33. *Que représente dans $\mathbb{R}^3$ la surface $f(x, y) = (x, y, 0)$ (avec $U = \mathbb{R}^2$).*

Le rôle joué par le vecteur tangent dans le cas des courbes est joué ici par ce qu'on appelle les vecteurs de coordonnées

Définition 3.34. On appelle vecteurs de coordonnées de la surface f (dans $\mathbb{R}^3$) les deux vecteurs

$$E_1(x, y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x} \right)$$

et

$$E_2(x, y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial y} \right)$$

E_1 mesure le changement de f dans la direction des x et E_2 mesure son changement dans la direction des y . Rappelons que le produit vectoriel de deux vecteurs $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ est le vecteur $w = u \times v = (w_1, w_2, w_3)$ donné par $w_1 = u_2 v_3 - v_2 u_3$, $w_2 = v_1 u_3 - u_1 v_3$ et $w_3 = u_1 v_2 - v_1 u_2$. Remarquer que $u \times v = 0$ si et seulement si $u = 0$ ou $v = 0$ ou u, v linéairement dépendants et que $u \times v$ est orthogonal à u et à v .

Définition 3.35. La surface est dite régulière en le point $P = (x_0, y_0) \in U$ si $E_1(x_0, y_0) \times E_2(x_0, y_0) \neq (0, 0, 0)$ ou de manière équivalente si $E_1(x_0, y_0) \neq (0, 0, 0)$, $E_2(x_0, y_0) \neq (0, 0, 0)$ et $E_1(x_0, y_0), E_2(x_0, y_0)$ linéairement indépendants. La surface est dite régulière si elle est régulière en tout point de U .

Exemple 3.36. Soit la surface de l'exemple 2.32. On a

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \\ &= (1, 0, 2x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_2(x, y) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) \\ &= (0, 1, -2y) \end{aligned}$$

Cherchons les points réguliers de cette surface. Pour cela on calcule

$$E_1(x, y) \times E_2(x, y) = (-2x, 2y, 1) \neq (0, 0, 0)$$

pour tout x, y . La surface est donc régulière.

Exercice 3.37. Quels sont les points réguliers de la surface $f(x, y) = (x, y^2, xy)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 3.38. Soit S la surface paramétrique $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Pour tout $P = (x, y) \in U$ le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs de coordonnées $E_1(P)$ et $E_2(P)$ est appelé l'espace tangent de la surface en le point P . On le note $T_P S$:

$$T_P S = \{\alpha E_1(P) + \beta E_2(P), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$T_P S$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Son orthogonal (et donc son supplémentaire) est l'espace normal de la surface en le point P . On le note $N_P S$. Il est de dimension 1 engendré par le vecteur $E_1(P) \times E_2(P)$.

Exercice 3.39. Soit la surface $f : U = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y) = (x, y, xy)$. Soit $P = (3, -2) \in U$.

1. Déterminer $T_P S$ et $N_P S$.
2. Soient les vecteurs $u = (1, 2, 4)$, $v = (2, 1, 1)$ et $w = (-4, 6, -2)$. Montrer que $u \in T_P S$, que $w \in N_P S$ mais que $v \notin T_P S$ et $v \notin N_P S$.

Arrivé ici et en comptant le chapitre sur la Géométrie affine, il est possible de passer l'examen final en cas de reprise. Autrement dit l'examen ne portera que sur les notions vues ici. Bonne chance.