Chapitre 3: Systèmes libres amortis à un degré de liberté

Les vibrations libres amorties, sont des vibrations résultantes après une perturbation initiale où l'amplitude diminue avec le temps jusqu'à l'arrêt complet du mouvement. La diminution de l'amplitude est due à la perte de l'énergie à cause des forces de frottement. Les frottements sont visqueux et dépend de la vitesse.

$$f=-cv$$

avec :

C : est le coefficient de frottement

V : est la vitesse

Equation de Lagrange du système amorti

Dans le cas du système amorti, il existe une force de frottement de la forme $f=-c\dot{q}$ et la perte d'énergie est défini par la fonction de dissipation $D=\frac{1}{2}c\dot{q}^2$ et l'équation du mouvement dans le cas d'un système libre amortie est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=0$$

On définit la fonction de dissipation par :

$$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2 \Longrightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=\alpha\dot{q}$$

La forme de l'équation différentielle est : $\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0\,2q=0$

Avec :

δ est le coefficient d'amortissement.

ω_0 est la pulsation libre.

Exemple : Dans le cas du système masse ressort, on a :

L'énergie cinétique de la masse est $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

L'énergie potentielle du ressort est $U=\frac{1}{2}kx^2$

L'énergie de dissipation est $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$

Donc $d/dt\,(\partial L/\partial\dot{x}) = m\ddot{x}$ et $\partial L/\partial x = kx$ et $\partial D/\partial\dot{x} = \alpha\dot{x}$

L'équation du mouvement est $m\ddot{x} + kx + \alpha\dot{x} = 0 \Rightarrow$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Qui est une équation différentielle linéaire du second ordre

Plus généralement, pour une coordonnée généralisée q elle s'écrit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial\dot{q}} = 0$$

Résolution de l'équation différentielle

L'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

a l'équation caractéristique suivante : $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$

Suivant la nature des racines de l'équation caractéristique, il existe trois types d'amortissement.

$\grave{\Delta} < 0$régime faiblement amorti.

$\grave{\Delta}=0 \Rightarrow \delta 2 - \omega 0\ 2 = 0$ régime critique.

$\grave{\Delta}>0 \Rightarrow \delta 2 - \omega 0\ 2 > 0$ régime fortement amorti.

Le régime est apériodique (fortement amorti) si $\delta>\omega_0$, et la solution est de la forme:

$$q(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

A1 et A2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure II-2 représente la solution q(t) en fonction du temps dans le cas particulier ou q(0)=q0 et $q(0)^{\cdot}=0$. La solution q(t) varie exponentiellement vers zéro.

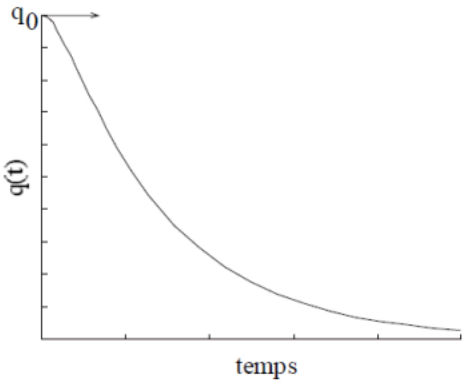


Fig. III-1. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime fortement amorti.

Si $\delta=\omega_0$ le régime est critique (Figure II-3), et la solution est de la forme :

$(t) = (A1 + A2t)^{-\delta t}$

A1 et A2 sont des constantes d'intégration calculées à partir des conditions initiales. La figure III-2 montre la variation de la solution q(t) en fonction du temps. q(t) est une fonction qui tend vers zéro sans oscillation lorsque le temps augmente.

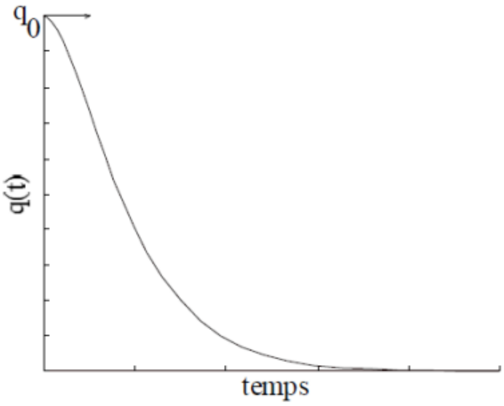


Fig. III-2. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime critique

Si $\delta<\omega 0$ le régime est pseudopériodique (Figure III-3), et la solution est de la forme :

$\boldsymbol{(t) = Ae^{-\delta t}co(\omega_a t + \varphi)}$

A, φ sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

ω_a est la pseudo pulsation définie par :

$$\omega a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

La figure III-3 illustre la variation de q(t) en fonction du temps. On remarque que q(t) est enveloppée par deux fonctions exponentielles. Le lieu des maxima est obtenu en résolvant

$\dot{q}(t)$ =0. Les maxima de q(t) sont séparés par des intervalles réguliers égaux à TA. TA est appelé la pseudo-période. On remarque que la diminution de l'amplitude des oscillations au cours du temps, l'un des effets de l'amortissement est l'augmentation de la période des oscillations. Pour des systèmes faiblement amortis ($\delta \ll \omega 0$), on peut remarquer que $\omega a \approx \omega_0$ et que la pseudo période est peu différente de la période propre : $TA \approx T0 = 2\pi/\omega_0$.

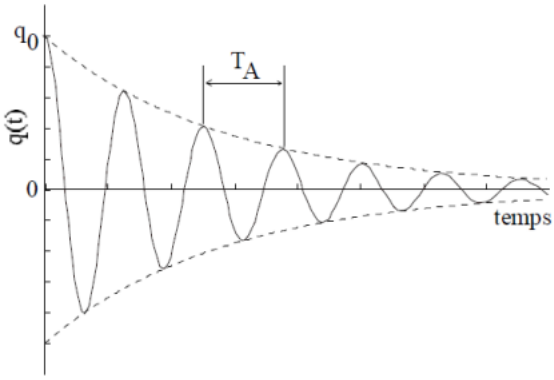


Fig. III-3. Variation de q(t) en fonction du temps pour le régime faiblement amorti.

- **Coefficient de frottement critique**

C_C est la valeur de C correspondante à Δ=0 c'est-à-dire

$$\left(\frac{Cc}{m}\right)^2 = 4\,k\,m \Rightarrow$$

$$\mathbf{Cc = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = \ 2m\omega_0}$$

- **Le rapport d'amortissement**

Le rapport d'amortissement est défini par

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{c}{Cc} \Rightarrow \frac{C}{2m} \ = \varepsilon\omega_0}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \varepsilon = \frac{C}{2m\omega 0}}$$

- **Le facteur de qualité**

Le facteur de qualité est défini par $\boldsymbol{Q} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{\Delta E}} = \boldsymbol{\omega_0\ 2\delta}$

Avec $\boldsymbol{E}$ l'énergie de l'oscillateur harmonique

$\Delta\boldsymbol{E}$ est l'énergie dissipée pendant un cycle.

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande.

- **Décrément logarithmique** (D)

La figure II-5 représente la définition du décrément logarithmique. Il est défini par le logarithme du rapport des deux amplitudes successives des oscillations amorties :

$$D = ln\frac{A(t1)}{A(t2)} = ln\frac{A(t1)}{A(t1+Ta)} = -ln\frac{A(t1+Ta)}{A(t1)}$$

En remplaçant les formules des amplitudes, on obtient à :

$$\boldsymbol{D = \delta Ta}$$

où δ est le coefficient d'amortissement.

Ta est le pseudo période. Elle est donnée par : $Ta = 2\pi/\omega a$

avec : ωa est la pseudo pulsation, elle est égale à : $\omega a = \sqrt{\omega 02\ -\ \delta\, 2}$

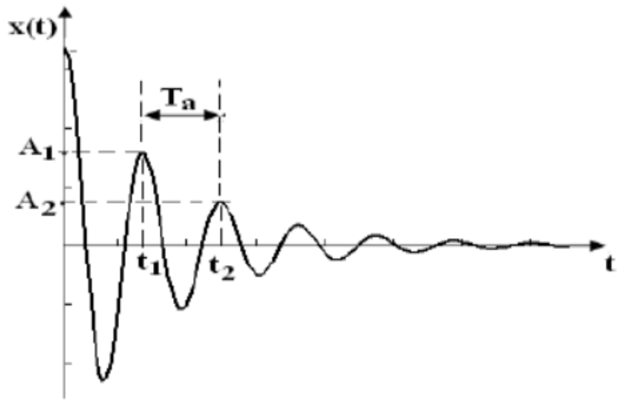
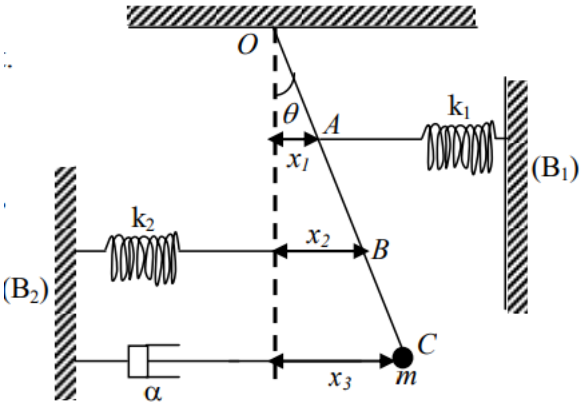


Fig. III-4. Définition du décrément logarithmique

Exercice

Une masse m est soudée à l'extrémité d'une tige de longueur l et de masse négligeable (Figure III-5). L'autre extrémité du fil est articulée au point O. La tige est liée au point A à un Bâti (B1) par un ressort de raideur k1. Au point B, la tige est reliée à un Bâti (B2) par un ressort de raideur k2. La masse m est liée au Bâti (B2) par un amortisseur de coefficient de frottement α. OA=l/3 et OB=2l/3. 1- Trouver l'équation différentielle du mouvement.



2- Déterminer la solution de l'équation différentielle dans le cas d'un faible amortissement, le coefficient d'amortissement, la pulsation propre et la pseudo-pulsation.