Solution de Interro de Math 03

Exercice 1 : 03/03

1) $I_1 = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2} dy \right] dx$

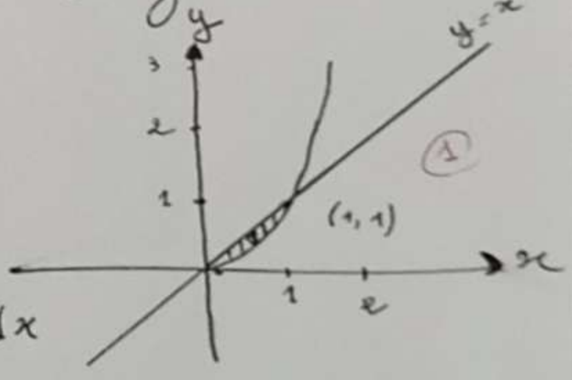
$I_1 = \int_0^1 \left[y e^{x^2} \right]_0^x dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 =$ 0,5

$\boxed{I_1 = \frac{1}{2}(e-1)}$ 0,5

2) $I_2 = \iint_D x\, dx\, dy$.

D est domaine cerné entre $y = x$ et $y = x^2$

$I_2 = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x x\, dy \right] dx$ 0,5



$I_2 = \int_0^1 \left[xy \right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left[x^2 - x^3 \right] dx$

$I_2 = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\boxed{I_2 = \frac{1}{12}}$ 0,5

Exercice 02 02/02

calcule de l'intégrale triple :

$$I_3 = \iiint_V z \, dx\, dy\, dz$$

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + z \le 1, z \ge 0 \}$$

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 dx\, dy \int_0^{1-x} z \, dz$$ 0,5

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{1-x} dx\, dy$$ 0,5

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2 \, dx\, dy$$

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2 \, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (1-x)^2 y \right]_0^1 dx$$ 0,5

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2 \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$I_3 = \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{6}}$$ 0,5

Exercice 03 : les intégrales impropres : 02/02

Règle de Riemann : $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ si $a=0$ est point (0,5)

de singularité si $p<1$ l'intégrale est convergent

si $p \geq 1$ " " diverge :

1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{(x)^{\frac{1}{2}}} \, dx$ (0,5)

$p = \frac{1}{2} < 1$ Alors $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$ est converge

R. R : $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx$, $a>0$,

* si $p > 1$ Alors l'intégrale est converge (0,5)
* si $p \leq 1$ " " " diverge

2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ alors $p=2>1$ (0,5) donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ est converge

Exercice 04 :

03/03

1) $3y' + 2y = 0 \Rightarrow y' + \frac{2}{3} y = 0$

0,5

$a(x) = \frac{2}{3}$, $A(x) = \int \frac{2}{3} \, dx = \frac{2}{3} x$

$y_0(x) = k e^{-\frac{2}{3} x}$ 0,5

2) $xy' + y = \cos(x)$

$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\cos(x)}{x}$ 0,5

$y(x) = k e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int b(x) \, e^{A(x)} \, dx$ 0,5

$a(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln(x)$ 0,5

$y(x) = k e^{-\ln(x)} + e^{-\ln(x)} \int \frac{\cos(x)}{\cancel{x}} \cancel{e}^{\cancel{\ln(x)}} \, dx$

$y(x) = \frac{k}{x} + \frac{1}{x} \cdot \int \cos(x) \, dx$

$\boxed{y(x) = \frac{k}{x} + \frac{1}{x} \cdot \sin(x)}$ 0,5