Les Équation différentielles

I. Généralités

① Définition : on appelle E D d'ordre n tout équation de la forme :

$$F(x, y(x), y'(x), \dots y^{n}(x)) = 0$$

où F est de $(n+2)$ variables

$y : I \to \mathbb{R}$ est fonction qui n fois dérivable sur I.

Exemple. $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ Alors

$$e^{x+y(x)} \times (y'(x))^2 = 0 \quad / \quad y(x) = y$$

② Équation différentielles linéaire :

une équation différentielle d'ordre n linéaire si elle est de la forme :

$$\underset{\uparrow \text{ seconde membre}}{\underline{\underline{g(x)}}} = \underbrace{a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y'' + \dots + a_n(x)\, y^{(n)}}_{\text{première membre}} \quad (E)$$

où a_i et g sont des fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$

Exemple : Exemple d'une E.D.L d'ordre 1 (parceque il y a une un seul dirivés)

$$a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' = g(x)$$

* si $g(x) = 0$ $\forall x \in I$ alors (E) est dite équation D.L. homogène, et on note (E_0)

* Si $\forall i \in \{0, 1, \dots n\}$ on a $a_i(x) =$ constante, $\forall x \in I$ alors (E) est dite E.D.L d'ordre n à coefficients constants.

③ proposition :
Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre n homogène (E_0) Alors :
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :
$\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de cette équation

Démonstration

$$\begin{aligned} \times\alpha & \left\{ a_0(x) y_1 + a_1(x) y_1' + \dots + a_n(x) y_1^{(n)} = 0 \right. \\ + \times\beta & \left\{ a_0(x) y_2 + a_1(x) y_2' + \dots + a_n(x) y_2^{(n)} = 0 \right. \end{aligned}$$

Donc $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$a_0(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) + \dots + a_n(x)(\alpha y_1^{(n)} + \beta y_2^{(n)}) = 0$$

II. Équation Différentielle linéaire du premier ordre:

a) Définition:

une E.D.L du $1^{ère}$ ordre si elle est de la forme

$$f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

Où f, g et h sont des fonctions continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Théorème: Soit (E) $y' + a(x)y = b(x)$, E.D.L du premier ordre
et $y' + a(x)y = 0$, E.D.H

on considère $A : I \to \mathbb{R}$ la primitive de a ($A'(x) = a(x)$)

Alors les solution de l'équation E sur I sont $y : I \to \mathbb{R}$ définis par:

la solution générale $\to y(x) = \underline{y_0(x)} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{solution particulier}} = k e^{-A(x)} + \left[\int b(x) e^{A(x)} dx\right] e^{-A(x)}$

y_0 : les solution de l'E.D.H

y_p : la solution particulière

où $k \in \mathbb{R}$

Démonstration :

* Les solutions de L.O.H (E_0)

* Si $y = 0$ alors est une solution de (E_0)

* si $y \neq 0$ alors

$$y' + a(x)y = 0 \Rightarrow y'(x) = -a(x)y(x)$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x)$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int -a(x)\,dx$$

$$\ln|y(x)| = -A(x) + C$$

$$|y(x)| = e^{-A(x)} \cdot e^{C}$$

$$y(x) = \underbrace{\pm e^{C}}_{k} e^{-A(x)}$$

On note $k = \pm e^{C}$

Ainsi $y_0 = k e^{-A(x)}$, $k \in \mathbb{R}$

Méthode 2 : $y' + a(x)y = 0$, $e^{A(x)} \times (y' + a(x)y) = 0$

$$y'e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}y(x) = 0$$

$$\int (y(x)e^{A(x)})' = \int 0 \Rightarrow y(x)e^{A(x)} = k$$

$$y(x) = k e^{-A(x)}$$

* la valeur particulier de (E)
* Méthode de variation de la constante

On a les solutions de (E_0) sont

$$y_0 = ke^{-A(x)}$$

On cherche une fonction k telle que $y = k(x)\, e^{-A(x)}$ est une solution :

$$y' = k'(x) e^{-A(x)} - a(x)\, k(x)\, e^{-A(x)}$$

$$y'(x) = k'(x)\, e^{-A(x)} - a(x)\, y(x)$$

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = k'(x)\, e^{-A(x)} = b(x)$$

Alors $k'(x)^{-A(x)} = b(x) \Leftrightarrow k'(x) = b(x)\, e^{A(x)}$

Alors. $k(x) = \int b(x)\, e^{A(x)}\, dx$

Ainsi la solution particulière $y_p = \left(\int b(x)\, e^{A(x)}\, dx\right) e^{-A(x)}$

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle :

$$5y' + 20y = 0 \;..\; (E)$$

$y' + 4y = 0$ Alor on a la primitive $a(x)=4$

et : $A(x) = \int 4\, dx = 4x$

Ainsi les solution de E

$y(x) = ke^{-4x}$ à $k \in \mathbb{R}$

2) Résoudre l'équation différentielle.

(E) : $y'(x) = 3x^2 y(x) + 2x^2$

$y' - 3x^2 y = 2x^2$

* cherchons les solutions de E.D.H.

(E_0): $y' - 3x^2 y = 0$

$a(x) = -3x^2$ alors $A(x) = \int -3x^2 \, dx = -x^3$

Alors : $y_0 = k e^{+x^3}$ où $k \in \mathbb{R}$

cherchons la y_P :

$y_P = \left[\int b(x) e^{A(x)} dx\right] e^{-A(x)}$

$y_P = \left[\int 2x^2 e^{A(x)} dx\right] e^{-A(x)}$

$= \underbrace{\left[\int 2x^2 e^{-x^3} dx\right]}_{\downarrow} e^{x^3}$

$= -\frac{2}{3} \int -3x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{2}{3} e^{-x^3}$

Alors $y_P = -\frac{2}{3} e^{-x^3} \cdot e^{x^3} = -\frac{2}{3}$

S.G : $y(x) = y_0 + y_P = k e^{x^3} - \frac{2}{3}$

3) Resoudre ED :

$y' + 2y = \sin(x) \quad \dots (E)$

$y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y$

$\frac{y'}{y} = -2$ Alors $\int \frac{y'}{y} dx = \int -2 \, dx$

$\ln|y(x)| = -2x + c$

$$|y(x)| = e^{c} e^{-2x}$$

$$y(x) = \pm e^{c} e^{-2x} = k e^{-2x} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Alors les solution de (E_0) sont :

$$y_0 = k e^{-2x} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

* On utilise la méthode de la variation de la constante c'est à dire :
on cherche une fonction k tell que
$y_p = k(x) e^{-2x}$ est une solution particulière
de l'équation (E)

$$y_p' = k'(x) e^{-2x} - 2 \underbrace{k(x) e^{-2x}}$$

$$y_p' = k'(x) e^{-2x} - 2 y_p$$

$$y_p' + 2 y_p = k'(x) e^{-2x} = \sin(x)$$

Alors $\quad k'(x) = e^{2x} \sin(x)$

$$\int e^{2x} \sin(x)\, dx = -\cos(x) e^{+2x} + 2 \int \cos(x) e^{2x} dx$$

$$\begin{cases} u(x) = e^{2x} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 2e^{2x} \\ v = -\cos(x) \end{cases}$$

$\boxed{\text{ALPES}}$

deuxième cas

$$\begin{cases} u(x) = e^{2x} \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 2e^{2x} \\ v = \sin(x) \end{cases}$$

$$= -\cos(x) e^{+2x} + 2\sin(x) e^{2x} - 4 \int \sin(x) e^{2x} dx$$

$$\int \sin(x) e^{2x} dx = -\frac{1}{5} \cos(x) e^{+2x} + \frac{2}{5} \sin(x) e^{2x}.$$

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{5}\cos(x)\, e^{+2x} + \frac{2}{5}\sin(x)\right) e^{-2x}$$
$$= -\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin(x)$$

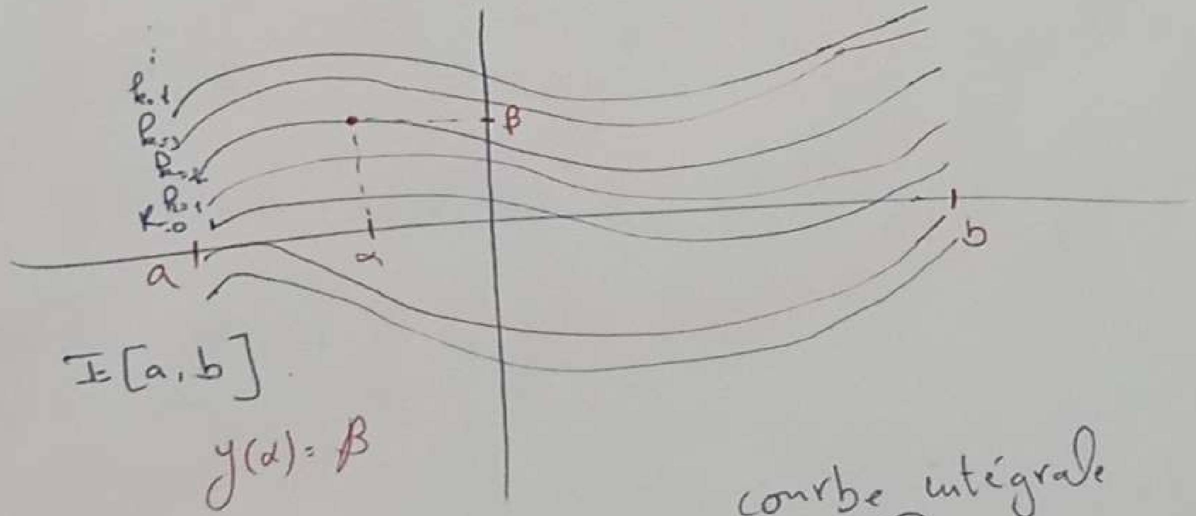
$$\boxed{y(x) = y_0 + y_p}$$

$$y(x) = k e^{-2x} - \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{2}{5}\sin(x)$$

Théorème de cauchy lipschitz :

Soit (E) $y' + a(x) y = b(x)$ une E.D.L

Alors pour tout $\alpha \in I$ et $\beta \in \mathbb{R}$ il existe une seule solution y de (E) telle que $y(\alpha) = \beta$



$I [a, b]$

$y(\alpha) = \beta$

courbe intégrale
$\Updownarrow$
graphe d'une solution
$\boxed{y = f(x)}$

Exemple :

On considère (E)

$x^2 y' + 2x y = 5$

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*\ ]0, +\infty[$

Trouver la solution sur $\mathbb{R}_+^*$ + vérifiant $y(1) = 6$

1) (E) $y' + \frac{2}{x} y = \frac{5}{x^2}$

on a $a(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow A(x) = 2\ln(x) = \ln(x^2)$

Alors $y_0 = k e^{-\ln(x^2)} = \frac{k}{x^2}$

$$\int \frac{5}{x^2} e^{\ln(x^2)} dx = \int 5 \, dx = 5x$$

$$y_p = 5x \frac{1}{x^2} = \frac{5}{x}$$

Ainsi la solution générale de (E) est

$$y(x) = y_0 + y_p = \frac{k}{x^2} + \frac{5}{x}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

2) $y(1) = 6$ alors : $k + 5 = 6 \Leftrightarrow k = 1$

Ainsi $y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}$

III. Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

1) Définition :

Une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants est une équation de forme

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = g(x)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ et g est une fonction continue sur Interval $I \subset \mathbb{R}$ et appelée second membre avec $(a \neq 0)$.

L'équation (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$ est appelée l'équation homogène associée à (E).

$$a(y_0'' + y_p'') + b(y_0' + y_p') + c(y_0 + y_p) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{ay_0'' + by_0' + cy_0}_{\text{solution } (E_0)} + \underbrace{ay_p'' + by_p' + cy_p}_{\text{solution particulière}} = 0 + g(x)$$

Alors

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

2) Les solutions de l'équation Homogène :

$$(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$$

* L'équation : $ar^2 + br + c = 0$ est appelée l'équation caractéristique associée à (E).

$$y'' = y^{(2)} \Leftrightarrow r^2$$

$$y' = y^{(1)} \Leftrightarrow r^1$$

$$y = y^{(0)} \Leftrightarrow r^0 = 1$$

* Le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

* Si $\Delta > 0$ Alors : E.C possède 2 solutions réelles

on note r_1 et r_2 ($r_1 \neq r_2$) alors :

$$y_0(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \quad \text{où } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

* Si $\Delta = 0$, alors E.C possède une racine double

r_0 alors $\quad y_0(x) = (k_1 x + k_2) e^{r_0 x} \quad$ où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Si $\Delta < 0$, alors E.C possède 2 racines complexes

$$\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$$

alors : $y_0(x) = e^{\alpha x}\left(k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)\right)$

		la base
$\Delta > 0$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$	$y_0(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$	$(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})$
$\Delta = 0$ $r_0 \in \mathbb{R}$	$y_0(x) = (k_1 x + k_2) e^{r_0 x}$	$(x e^{r_0 x}, e^{r_0 x})$
$\Delta < 0$ $r_1 = \alpha + i\beta$ $r_2 = \alpha - i\beta$	$y_0(x) = e^{\alpha x}[k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x)]$	$(e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x))$

Démonstration

Dans le cas $\Delta > 0$, alors E.C possède deux solutions réelles r_1 et r_2

cherchons une fonction f telle que $y_0(x) = f(x) \cdot e^{r_2 x}$

$$y_0'(x) = f'(x) e^{r_2 x} + r_2 f(x) e^{r_2 x}$$

$$y_0''(x) = f''(x) e^{r_2 x} + 2 r_2 f'(x) e^{r_2 x} + r_2^2 f(x) e^{r_2 x}$$

on a : $a y_0'' + b y_0' + c y = 0$

$$e^{r_2 x} \cdot \left[a f''(x) + 2 a r_2 f'(x) + a r_2^2 f(x) + b f'(x) + b r_2 f(x) + c f(x) \right] = 0$$

$$a f''(x) + (2 a r_2 + b) f'(x) + \underbrace{(a r_2^2 + b r_2 + c)}_{E.C = 0} f(x) = 0$$

$$a f''(x) + (2 a r_2 + b) f'(x) = 0$$

on pose $h(x) = f'(x)$ et $h'(x) = f''(x)$.

$$\frac{a}{a} h'(x) + \left(\frac{2 a r_2 + b}{a} \right) h(x) = 0$$

$$h(x) = k e^{-(2 r_2 + \frac{b}{a}) x}$$

$$f(x) = \int h(x)\, dx = k_1 e^{-(2 r_2 + \frac{b}{a}) x} + k_2$$

$$y_0(x) = f(x) e^{r_2 x} = k_1 e^{-(r_2 + \frac{b}{a}) x} + k_2 e^{r_2 x}$$

$$a (r - r_1)(r - r_2) = a r^2 + b r + c = 0$$

$$a r^2 + (-a r_1 - a r_2) r + a r_1 r_2 = 0$$

$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$ et $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$

$$y_0(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

* Dans le cas $\Delta = 0$, alors E.C. possède une racine double r_0 c'est à dire

$a r_0^2 + b r_0 + c = 0$ et $2a r_0 + b = 0$

on cherche f telle que $y_0 = f(x) e^{r_0 x}$

$y_0'(x) = f'(x) e^{r_0 x} + r_0 f(x) e^{r_0 x}$

$y_0''(x) = f''(x) e^{r_0 x} + 2 r_0 f' e^{r_0 x} + r_0^2 f(x) e^{r_0 x}$

on a :

$a y_0'' + b \cdot y_0' + c y_0 = 0$

$\Leftrightarrow e^{r_0 x}\left[a f''(x) + 2 a r_0 f'(x) + a r_0^2 f(x) + b f'(x) + b r_0 f(x) + c f(x)\right] = 0$

$$a f''(x) + \underbrace{(2 a r_0 + b)}_{0} f'(x) + \underbrace{(a r_0^2 + b r_0 + c)}_{0} f(x) = 0$$

alors r_0 est une racine double alors

$a f''(x) = 0$ car $a \neq 0$ alors $f''(x) = 0$

$f'(x) = k_1 \Leftrightarrow f(x) = k_1 x + k_2$

Ainsi $y_0(x) = (k_1 x + k_2) e^{r_0 x}$ où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Dans le cas $\Delta < 0$, alors E.C possède 2 racines complexes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$

Théorème

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{R}$. espace vectoriel de dimension 2

pour 1ère ordre $\begin{cases} y' + a(x)y = 0 \\ y_0 = k e^{-A(x)} \end{cases}$

on note S_0 l'ensemble des solution de (E_0) D_I l'ensemble des fonction 2 fois dérivable sur I

S_0 est un sous espace vectoriel de D_I

On a $S_0 \neq \emptyset$ car $0 \in S_0$

$\forall f_1 . f_2 \in S_0$ c-à-d : $\begin{matrix} \alpha \times \\ \beta \times \end{matrix} \begin{cases} af_1'' + bf_1' + cf_1 = 0 \\ af_2'' + bf_2' + cf_2 = 0 \end{cases}$

$$a(\alpha f_1'' + \beta f_2'') + b(\alpha f_1' + \beta f_2') + c(\alpha f_1 + \beta f_2) = 0$$

Alors $\alpha f_1 + \beta f_2 \in S_0$

Finalement S_0 est un espace vectoriel de dimension 2

$$y \in S_0 \quad y = k_1 y_1 + k_2 y_2$$

Alors on obtient $\begin{cases} f(x) = e^{r_1 x} = e^{\alpha x} \times e^{i\beta x} \\ g(x) = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} \end{cases}$ deux

solution complexe de l'équation (E_0), comme on a

$\begin{Bmatrix} Re(f(x)) = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ Im(f(x)) = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{Bmatrix}$ sont 2 solutions réelles linéairements indépendants c-à-d :

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x + \beta e^{\alpha x} \sin(\beta x) = 0)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

Alors $(e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x)$ est une base de S_0.

Exemples Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

1) (E_0) : $2y'' - 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique : $2r^2 - 2r + 1 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(2)(1) = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$$

Alors E.C. possède 2 racines complexes :

$$r_1 = \frac{2 - 2i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$r_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$$

Ainsi : $y_0(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot (k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x))$

$$y_0(x) = e^{\frac{1}{2}x}(k_1 \cos(\tfrac{1}{2} x) + k_2 \sin(\tfrac{1}{2} x))$$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

2) (E_0) $2y'' + 3y' - 2y = 0$.

$$2r^2 + 3r - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(-2)(2) = 9 + 16 = 25$$

$$r_1 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \qquad r_2 = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$y_0(x) = k_1 e^{\frac{1}{2}x} + k_2 e^{-2x}$$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

2) (E_0) : $3y'' - 6y' + 3y = 0$

$$3r^2 - 6r + 3 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$$

$$r_0 = \frac{6}{6} = 1$$

Alors : $y_0(x) = (k_1 x + k_2)e^{x}$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

3) La solution particulière de (E) : $ay'' + by' + cy = g(x)$

- Méthode de la variation des constantes

Nous considerons les cotantes k_1 et k_2 dans y_0 comme des fonction inconnues et cherchons une solution particulière (E) sous la forme : $y_p(x) = k_1(x)\, y_1(x) + k_2(x)\, y_2(x)$

avec les fonctions k_1 et k_2 vérifiant.

$$\begin{cases} k_1'(x)\, y_1(x) + k_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ k_1'(x)\, y_1'(x) + k_2'(x)\, y_2'(x) = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{avec} \quad y_0(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x).}$$

Preuve

$$y_p(x) = k_1 y_1 + k_2 y_2$$

$$y_p' = k_1 y_1' + k_2 y_2' + \underbrace{\overbrace{k_1' y_1 + k_2' y_2}^{h(x)}}_{=0}$$

$$y_p'' = k_1' y_1' + k_1 y_1'' + k_2' y_2' + k_2 y_2'' + h'(x)$$

$$a y_p'' + b y_p' + c y = g(x) \text{ où } a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a k_1' y_1' + a k_1 y_1'' + a k_2' y' + a k_2 y_2'' +$$

$$+ b k_1 y_1' + b k_2 y_2' + b\, h(x) + c k_1 y_1 + c k_2 y_2 = g(x)$$

$$\Leftrightarrow k_1 \underbrace{(a y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{\to 0} + k_2 \underbrace{(a y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{\to 0} +$$

$$+ a \underbrace{(k_1' y_1' + k_2' y_2')}_{g(x)} + a \underbrace{h'(x)}_{= 0} + b \underbrace{h(x)}_{= 0} = g(x)$$

$$y_0(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

Exemple Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

$$(E) : y'' - y' - 2y = \cos(x)$$

Les solutions de (E_0) : $y'' - y - 2y = 0$

$$r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(-2)(1)$$
$$\Delta = 9$$

Alors $r_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

$r_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

Ainsi :

$$y_0(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x} \quad \text{où } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$

* La solution particulier :

nous cherchons les fonctions k_1 et k_2 telles que

$$y_p(x) = k_1(x) e^{2x} + k_2(x) e^{-x} \text{ et}$$

$$\begin{cases} k_1'(x) e^{2x} + k_2'(x) e^{-x} = 0 \quad \ldots (1) \\ 2 k_1'(x) e^{2x} - k_2'(x) e^{-x} = \frac{g(x)}{a} = \cos(x) \quad (2) \end{cases}$$

① + ②

ALPES

$3\, k_1'(x) e^{2x} = \cos x$

$k_1'(x) = \frac{1}{3} \cos x\, e^{-2x}$ alors $k_1(x) = \frac{1}{3}\int \cos x\, e^{-2x}\, dx$

$k_2'(x) = -\frac{1}{3}\, e^{x} \cos x \Leftrightarrow k_2(x) = -\frac{1}{3}\int e^{x} \cos x\, dx$

$k_1(x) = \frac{1}{3}\int \cos x \; e^{-2x}\, dx$

calcule de $\int \cos x\, e^{-2x}\, dx$

$$\begin{cases} u = e^{-2x}, & u' = -2e^{-2x} \\ v' = \cos x, & v = \sin x \end{cases}$$

$$\int \cos x\; e^{-2x}\, dx = e^{-2x}\sin x + 2\int e^{-2x}\sin x\, dx$$

$$\begin{cases} u = e^{-2x} & u' = -2e^{-2x} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int \cos x\, e^{-2x}\, dx = e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x - 4\int e^{-2x}\cos x\, dx$$

$$5\int e^{-2x}\cos x\, dx = e^{-2x}\sin x - 2e^{-2x}\cos x$$

$$= \frac{1}{5} e^{-2x}\sin x - \frac{2}{5} e^{-2x}\cos x$$

$$k_1(x) = \frac{1}{15} e^{-2x}\sin x - \frac{2}{15} e^{-2x}\cos x$$

calcule : $\int e^x \cos x \, dx$

$$\begin{cases} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{cases}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \left[e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \right.$$

$$- \left[\right.$$

$$\begin{cases} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x$$

$$k_2(x) = -\frac{1}{6} e^x \sin x - \frac{1}{6} e^x \cos x$$

$$y_p = \frac{1}{15} \sin x - \frac{2}{15} \cos x - \frac{1}{6} \sin x - \frac{1}{6} \cos x .$$

$$\boxed{y_p = -\frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x}$$

et $y_0(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}$

Finalement la solution générale de (E) est :

$$y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x} - \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x$$

où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

E.D.E ordre 2 :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

S.P : $ay_p'' + by_p' + cy_p = f(x)$.

1er cas : $f(x) = e^{mx} P_n(x)$

→ m n'est pas racine de E.C.

$$y_p = e^{mx} \cdot Q_n(x)$$

→ m est racine de E.C. (racine simple)

$$y_p = e^{mx} x\, Q_n(x)$$

→ m racine double de E.C.

$$y_p = e^{mx} x^2 Q_n(x)$$

2ème cas : $f(x) = e^{mx} P_n(x) \cos(\beta x)$

ou bien $\sin(\beta x)$.

→ $m + i\beta$ n'est pas racine de E.C.

$$y_p = e^{mx} Q_n(x) \cos(\beta x)$$

$/ \sin(\beta x)$

→ $m + i\beta$ racine de E.C.

$$y_p = e^{mx} x\, Q_n(x) \cos \beta x$$

$/ \sin \beta x$.