Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf de Mila
Institut des Mathématiques et Informatiques
Première Année Master Mathématiques Appliquées et Fondamentales 2024/2025

Matière : *Équations aux différences*
Responsable : *Y. Halim*

Série de TD N° 4

Exercice 1 :

Soit l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{rx_{n-1}}{1+x_n}, \quad n \geq 0. \tag{1}$$

avec les conditions initilaes x_0 et x_{-1} sont positives et $r > 0$.

1. Détrminer les points d'équilibres de l'équation (1).
2. Donner une condition nicéssaire et sufisante sur r, pour le point d'équilibre $\overline{x} = 0$ soit asymptotiquement stable .
3. Montrer que $r < 1$, alors $\overline{x} = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Exercice 2 : (Examen 2018)

Soit le système d'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad n \geq 0 \tag{2}$$

avec les valeurs initiales x_{-1}, y_{-1}, x_0 et y_0 sont des nombres réels non nulles.

1. Montrer que la solution du système (2) est éventulement périodique de période p (déterminé la valeur de p).
2. Déduire la forme de solution du système (2).

Exercice 3 :

Soit le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{x_n y_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{\beta y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

où $x_{-1}, y_{-1}, x_0, y_0, \alpha$ et β sont des nombres réels strictement positifs.

1. Montrer que la solution du système (3) est unique.
2. Montrer que pour toute solution $(x_n, y_n)_{n\geq -1}$ du système (3)

$$x_{n+3} = \frac{\alpha}{\beta^2}x_n, \quad y_{n+3} = \frac{\beta^2}{\alpha}y_n, \quad n \geq 1.$$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la solution du système (3) soit périodique de période 3.

Exercice 4 :

Soit le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{1+y_{n-1}} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{1+x_{n-1}} \end{cases} \tag{4}$$

avec $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} \geq 0$.

1. Trouver le point d'équilibre positive du système (4).
2. Déterminer le système linéaire associé au système (4).
3. Monter que le système (4) est localement asymptotiquement stable.