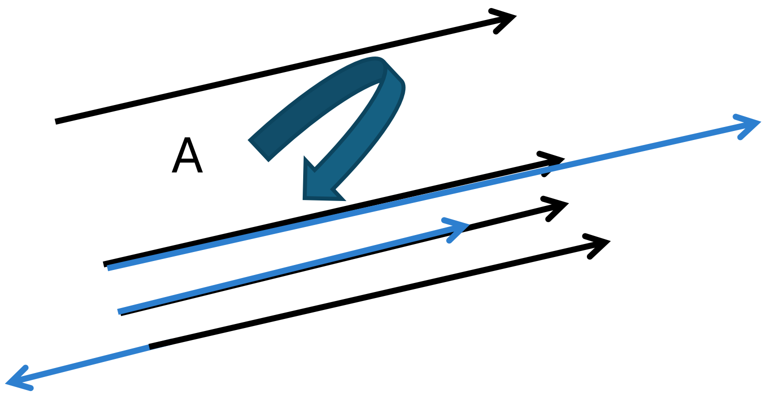
Vecteurs et valeurs propres

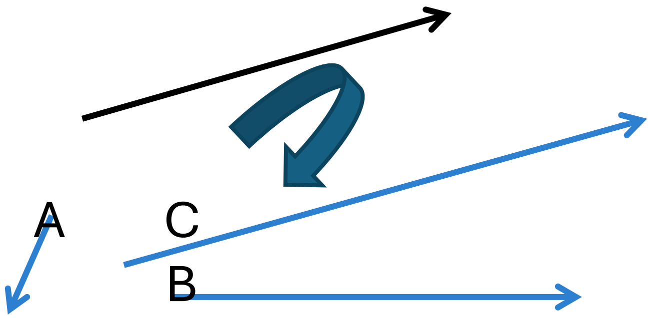
Vecteurs et valeurs propres

$$f \in \mathcal{L}(E,F) : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow AX = Y$$

avec $A \in M_n(K)$

$$\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \quad \xrightarrow{A} \quad \begin{matrix} \boldsymbol{y_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{matrix}$$





$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vecteurs et valeurs propres

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$AX = \lambda X$$

$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$: vecteur propre de A

correspondant a la valeur propre $\lambda = 3$

Vecteurs et valeurs propres

Définition

- On dit que λ est une valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur x non nul solution de

$$Ax = \lambda x$$

- Le vecteur x est alors dit vecteur propre associé à λ

Calcul des vecteurs et valeurs propres

- Les valeurs propres d'une matrice A d'ordre n sont: les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique associé à A

  $\rightarrow$ racines de $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

- À toute valeur propre λ d'une matrice A, est associé au moins un vecteur non nul v tel que $Av = \lambda v$, appelé vecteur propre de la matrice A correspondant à la valeur propre λ.

Vecteurs et valeurs propres

$$\boldsymbol{\lambda} = ?$$

on a $\lambda x = Ax$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda x - Ax \\ 0 &= \lambda \boldsymbol{I} x - Ax \\ 0 &= (\lambda \boldsymbol{I} - A)x \\ &\Rrightarrow \quad Bx = 0 \end{aligned}$$

- $\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$: équation caractéristique de A
- $\det(\lambda \mathrm{I} - A)$

  polynôme caractéristique de A, noté $P_A(\lambda)$

Calcul des vecteurs et valeurs propres

Exemple:

Trouver les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) **<u>Les valeurs propres de A sont les solution de $\boldsymbol{det(A - \lambda I) = 0}$</u>**

$$\det(A - \lambda I) = \det \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \lambda)(-1 - \lambda)$$

D’où $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1}$

Calcul des vecteurs et valeurs propres

2) Vecteurs propres

- Pour λ_1=1, le vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associé est solution de l'équation caractéristique

$$(A - 1I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où la famille des vecteurs propre associé à λ_1=1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Calcul des vecteurs et valeurs propres

- Pour λ_2=-1, le vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associé est solution de

$$(A-(-1)I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+2y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x+y=0 \ \rightarrow y=-x \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où la famille des vecteurs propre associé à λ_2=-1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calcul des vecteurs et valeurs propres

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

L'équation caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0,$$

d'où les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

1. Cas $\lambda_1 = 1$. On doit trouver $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tel que

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

- la solution du système d'équations est $x_1 = -2x_3$, $x_2 = x_3$ et x_3 est une variable libre ;
- $(-2s, s, s)$ est un vecteur propre correspondant à $\lambda = 1$;
- en fait, tout vecteur de la forme $(-2, 1, 1)$ est un vecteur propre correspondant à $\lambda = 1$.

Ainsi, $(-2, 1, 1)$ est une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 1$.

Calcul des vecteurs et valeurs propres

L'équation caractéristique de **A** est

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 1) = 0,$$

2. Cas $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

$$(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

soit

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

- la solution est $x_1 = -x_3$, x_2 et x_3 sont des variables libres ;
- $(s, t, -s)$ est un vecteur propre correspondant à $\lambda = 2$;
- on a

$$\begin{bmatrix} s \\ t \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 0)$ forment une base de vecteurs propres correspondant à $\lambda = 2$.

Spectre, Rayon spectral, …

- Le spectre de A, noté $\sigma_{\mathbb{K}}(A)$est l'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$.

- Si $\sigma_{\mathbb{K}}(A) \neq \Phi$, le rayon spectrale de A est le réel positif défini par $\rho(A) = \max\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \sigma_{\mathbb{K}}(A)\}$

Quelques propriétés

- $\sigma_{\mathbb{K}}(A) = \sigma_{\mathbb{K}}(A^t)$
- Soit la matrice A d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, et possédant toujours n valeurs propres λ_i, $i = 1, \dots, n$ distinctes ou confondues, on a les propriétés suivantes :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Spectre, Rayon spectral, …

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Les valeurs propres de la matrice A (calculées précédemment et associé aux vecteur propre) sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 5$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 4$$