CHAPITRE 04 : EXEMPLES DE LOIS DE PROBABILITÉ USUELLES

0.1 Lois discrètes usuelles

0.1.1 Lois de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$

On dit que la v.a X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si :
X prend la valeur 0 ou 1 avec
$P(X=1)=p$ (succé) et $P(X=0)=1-p=q$ (echec)

Exemple 1. *On jette une pièce de monnaie une seule fois*
- La probabilité d'avoir pile $P(P)=\frac{1}{2}$ (succé).
- La probabilité d'avoir face $P(F)=\frac{1}{2}$ (echec).

$$P(X=1)=p=\frac{1}{2} \qquad P(X=0)=1-p=q=\frac{1}{2}$$

Espérance et variance

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors

$$E(X)=p \quad , \quad Var(X)=p.q \quad , \quad \sigma(X)=\sqrt{p.q}$$

En effet

$$\begin{aligned} E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i) &= 0\times P(X=0)+1\times P(X=1)=0\times q+1\times p=p \\ Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2 &= (0^2\times q+1^2\times p)-p^2=p(1-p)=p.q \end{aligned}$$

Dans notre exemple :

$$\begin{aligned} E(X) &= p=\frac{1}{2} \\ Var(X) &= p.q=p(1-p)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \\ \sigma_X &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemple 2. *On jette un dé.*
La probabilité d'avoir (4) *: succé,*
La probabilié de ne pas avoir (4) *: echec.*

$$P(X=1)=p=\frac{1}{6}, \qquad P(X=0)=1-p=\frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{6} \\ Var(X) &= p.q=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36} \\ \sigma_X &= \sqrt{\frac{5}{30}}=\frac{\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

0.1.2 La loi de Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

On effectue **n répétitions indépendantes** d'une épreuve de **Bernoulli** dont la probabilité de succé est p.
Soit $X=k$ **le nombre de succés** parmi les n résultats (répétitions).
Alors, on dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p dénoté $X\sim\mathcal{B}(n,p)$ et

$$\begin{aligned} P(X=k) &= C_n^k\ p^k\ (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\ p^k\ (1-p)^{n-k}, \qquad 0\le p\le 1, \quad k=0,1,2,...,n \end{aligned}$$

• n : le nombre d'expériences aléatoires indépendantes.
• p : La probabilité de succés au cours de chacune des n expériences aléatoires (p doit rester constante).
Remarque : On a

$$\begin{aligned} q=1-p &\Rightarrow q+p=1 \\ 1=(q+p)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ p^k\ q^{n-k} \end{aligned}$$

• La loi binomiale est utilisée pour modéliser "un soudage "avec remise.
• *Si* $X\sim\mathcal{B}(n,p)\Rightarrow X=\sum_{i=1}^n X_i=X_1+X_2+...+X_n,$ *avec* $X_i\sim\mathcal{B}(p)$

<u>**Espérance et Variance**</u> : Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ Alors

$$E(X) = np, \quad Var(X) = n.p.q$$

En effet

$$\begin{aligned} E(X) &= E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n.p \\ Var(X) &= Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n\,Var(X_i) = n.p.q. \text{(Ce résultat vient de l'indépendance des } X_i). \end{aligned}$$

Exemple 3. *Dans un lot important de pièces, dont* 10% *sont défectueeuses, on prélève un échantillon de* 20 *pièces.*
Quelle est la probabilité d'obtenir plus de deux pièces défectueuses ?

⋆X *est une v.a qui représente le nombre de pièce défectueuses,* $X = 0, ..., 20$.
⋆ *La probabilité qu'une pièce choisie soit défectueuse (de succés) est* $p = 0,1$, *donc* $X \sim \mathcal{B}(20, 0,1)$ *et* $P(X = k) = C_{20}^{k}(0,1)^k(0,9)^{20-k}$
La probabilité d'avoir plus de deux pièces dééfectueuses dans l'echantillon est.

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= P(X = 3) + ... + P(X = 20) \\ P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} \\ P(X = 0) &= C_{20}^{0} \times (0.1)^0 \times (0.9)^{20} = 0,1501 \\ P(X = 1) &= C_{20}^{1} \times (0.1)^1 \times (0.9)^{19} = 0,2702 \\ P(X = 2) &= C_{20}^{2} \times (0.1)^2 \times (0.9)^{18} = 0,2852 \\ P(X > 2) &= 0,2945 \end{aligned}$$

$E(X) = n \times p = 20 \times 0.1 = 2$

0.1.3 La loi de Poisson

La loi de poisson intervient pour des phénomènes statistiques dont le nombre réalisation varie de 0 à l'infini et dont la fréquence moyenne de réalisation est connue et on dit que X suit une loi de poisson de paramètre λ $(\lambda \geq 0)$ et on note : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si

$$X \in \{0, 1, 2, ...\}, \qquad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Exemple 4. - *Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique*
- *Nombre d'accident de la circulation*

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) &= 1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1. \end{aligned}$$

<u>**Espérance et variance**</u> :

$$E(X) = \lambda, \qquad Var(X) = \lambda.$$

En effet

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) &= \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k(k+1)!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

0.1.4 Approximation de la loi binomiale par la loi de poisson :

Dès que le paramètre n de la loi binomiale est assez grand $n \longrightarrow \infty$ et p proche de 0 $(p \longrightarrow 0)$ avec le produit $n.p \longrightarrow constante(\lambda)$
Alors

$$\mathcal{B}(n, p) \longrightarrow P(\lambda)$$

En pratique l'approximation est statisfaisante lorsque la probabilité $p < 0.1$ et le produit $n.p \leq 5$

0.2 Lois continues

0.2.1 La loi normale (ou loi de Laplace-Gausse)

C'est une lois trés importante comme va le montrer le théorème central limite que nous verrons dans ce paragraphe.

Indroduction

Si on revient à la loi binomiale on remarque que lorsque n devient grand le calcul de C_n^k devient fastidieux mais on montre que pour p et q pas 'trop' petits, la fonction de répartition de la loi binomiale converge, lorsque $n \longrightarrow \infty$, vers la fonction de répartition d'une loi continue, appelée loi normale.

Définition :

Une v.a.r continue X, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est de loi normale (ou gaussienne) de moyenne m et de variance $\sigma^2 (\neq 0)$, si sa fonction de densité de probabilité est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{(x-m)^2}{e\sigma^2}}$$

On note :

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$$

On montre que si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (on dit qu'on a centré et réduit la v.a.r X).

Z est une v.a.r de loi normale dite centrée et réduite, sa densité est égale à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

de courbe donnée par

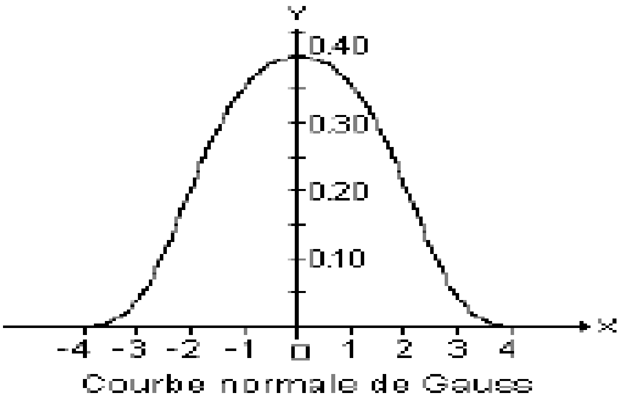

FIGURE 1 –

La fonction de répartition

La fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite notée ϕ, n'a pas d'expression algébrique conuue mais ces valeurs sont tabulées (Voir la table de la loi normale) et permet même de déduire la fonction de répartition d'une loi normale de moyenne et de variance quelconques, en effet la fonction de répartition la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ est égale à

$$F(x) = P(X \leq x) = P(Z = \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}) = \phi(\frac{x-m}{\sigma})$$

Nous savons que $\phi(x)$ est donnée par la surface qui se trouve entre la courbe prćédente, l'axe des abscisses et la droite parallèle àl'axe des ordonnées et passant par x.

Propriétés :

1. $\phi(-x) = 1 - \phi(x), \forall x \in \mathbb{R}$
2. $P(X \leq -t) = P(X > t)$
3. $P(a \leq X \leq b) = \phi(b) - \phi(a)$

Exemple 5. *:*

Soit $X \sim \mathcal{N}(12, 2)$*, calculer* $P(X \leq 18)$ *et* $P(X \leq 8)$

***Solution** :*

$P(X \leq 18) = P(\frac{X-12}{2} \leq \frac{18-12}{2}) = P(Z \leq 3) = \phi(3) = 0.99865$ *(par lecture sur la table)*

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= P(\frac{X-12}{2} \leq \frac{8-12}{2} = P(Z \leq -2) = \phi(-2) \\ &= 1 - \phi(2) \\ &= 1 - 0.9772 \\ &= 0.0228. \end{aligned}$$

Exemple 6. *Soit* $X \sim \mathcal{N}(0.1)$, *calculer* $P(0 \leq Z \leq 0,5)$

$$P(0 \leq Z \leq 0,5) = \phi(0,5) - \phi(0) = 0,6915 - 0,5 = 0,1915$$

.

Théorème central limite :

Convergence en loi :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a r de fonction de répartitions respectives $(F_n)_{n\geq 1}$, si $F_n(x) \to F(x)$, quand $n \to \infty$ en tout point de continuté x de la fonction de répartition F, on dit que $(X_n)_{n\geq 1}$, *converge en loi* vers X où X est un v.a r de fonction de répartition F.

0.2.2 Loi de moivre laplace

Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. On montre que pour n assez grand et p pas trop petit, (X_n) converge on loi vers X de loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$. Dans la pratique l'aproximation de la loi binomiale par la loi normale se fait dès que $npq > 3$. Dans ce cas la loi de $\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$ est approchée par la loi $\mathcal{N}(0.1)$.

Nous arrivons à un résultat qui justifie l'importance pratique de la loi normale.

Thoérème 0.1. *(Théorème central limite ou TCL)*

Soit $X_1, ..., X_n, ...$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Posons* $E(X_i) = m$, $Var(X_i) = \sigma^2$ *et* $Y_i = \frac{X_i - m}{\sigma}$, *alors*
$\sqrt{n}(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n})$ *converge en loi vers une v.a.r de loi* $\mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque 1. *Remarquons que l'importance de ce résultat vient du fait que la convergence a toujours lieu vers la loi normale quelque soit la loi de départ de* X_i.
Dans la pratique on utilise le TCL dès que $n \geq 30$ *et même dès que* $n \geq 15$ *si on sait que la loi de* X_i *est symétrique.*