CHAPITRE 2

GROUPES NILPOTENTS

Le but de ce chapitre est l'étude des groupes nilpotents qui sont très importants pour notre étude, nous nous intéressons à la notion du suite centrale (suite centrale ascendante, suite centrale descendante), puis on parlera sur les groupes nilpotents dans lesquels on va étudier la classe de nilpotence, la relation entre la nilpotence et la résolubilité, quelques propriétés des groupes nilpotents et terminant par les groupes nilpotents finis.

2.1 Notations

Le centre et le groupe dérivé d'un groupe G seront respectivement noté $\zeta(G)$ et G'.

Définition 2.1 (***Sous-groupe caractéristique***) *Soit G un groupe, le sous-groupe H de G est dit caractéristique si pour tout automorphisme $\alpha \in Aut(G)$, $\alpha(H) = H$ et on note $H \sqsubset G$.*

Remarques 2.1 *1) $\{e\} \sqsubset G$ et $G \sqsubset G$*

2) $H \sqsubset G \Longrightarrow H \lhd G$

3) $G' \sqsubset G$ et $Z(G) \sqsubset G$

4) $H \sqsubset G$ et $K \sqsubset H \Longrightarrow K \sqsubset G$

5) $H \sqsubset G$ et $K \lhd H \Longrightarrow K \lhd G$

6) $\forall i \in \mathbb{N} :\ G^{(i)} \sqsubset G$.

2.2 Notions de suite centrale

Soient X, Y deux parties non vides de G, on désigne par $[X, Y]$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs $[x, y]$, où $x \in X$ et $y \in Y$.

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy \Rightarrow [x, y]^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx = [y, x]$$

Par suite :

$$[X, Y] = [Y, X]$$

De plus, quels que soient X, Y, Z, parties non vides de G on vérifie facilement que :

$$Y \subseteq Z \Rightarrow [X, Y] \subseteq [X, Z] \tag{2.1}$$

Définition 2.2 *Pour un groupe G, une suite de composition :*

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_{n-1} \geqslant G_n = (e)$$

sera appelée suite centrale, si c'est une suite normale telle que $\dfrac{G_i}{G_{i+1}} \leqslant \zeta\left(\dfrac{G}{G_{i+1}}\right)$, *pour tout* $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Proposition 2.1 *Une suite de composition d'un groupe G :*

$$\sum : \ G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_{n-1} \geqslant G_n = (e),$$

est une suite centrale si et seulement si, pour tout i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, on a :

$$[G_i, G] \leqslant G_{i+1}. \tag{2.2}$$

Preuve. - Supposons que $\sum$ soit une suite centrale ; pour i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, on a :

$$G_{i+1} \lhd G \quad \text{et} \quad \frac{G_i}{G_{i+1}} \leqslant \zeta\left(\frac{G}{G_{i+1}}\right)$$

Soient $x \in G_i$ et $g \in G$; notons $\bar{x}$ et $\bar{g}$ leurs classes modulo G_{i+1}, alors :

$$\bar{x}\bar{g} = \bar{g}\bar{x} \iff [x, g] \in G_{i+1},$$

d'où $[G_i, G] \leqslant G_{i+1}$

- Réciproquement, supposons que $\sum$ vérifie la condition $(2, 2)$.

Montrons que G_{i+1} est normal dans G. Soient $x \in G_{i+1}$ et $g \in G$, $G_{i+1} \leqslant G_i$ implique $x \in G_i$; alors, d'après la condition $(2, 2)$, $[x, g] = x^{-1}(g^{-1}xg)$ appartient à G_{i+1}, d'où $g^{-1}xg \in G_{i+1}$.

De plus, $[x, g] \in G_{i+1}$ équivaut à $\bar{x}\bar{g} = \bar{g}\bar{x}$ dans $\dfrac{G}{G_{i+1}}$.

Par suite :

$$\frac{G_i}{G_{i+1}} \leqslant \zeta(\frac{G}{G_{i+1}})$$

∎

Définition 2.3 *Un groupe sera dit nilpotent s'il possède une suite centrale.*

2.2.1 Suite centrale ascendante

Notation 2.1 *G étant un groupe, posons $\zeta_0(G) = (e)$, $\zeta_1(G) = \zeta(G)$.*
On sait que $\zeta_1(G)$ est caractéristique dans G (Remarque (2.1)), par suite l'unique sous-groupe $\zeta_2(G)$ contenant $\zeta_1(G)$, tel que :

$$\frac{\zeta_2(G)}{\zeta_1(G)} = \zeta\left(\frac{G}{\zeta_1(G)}\right),$$

est caractéristique dans G.

De proche en proche, on défini, pour tout $i \in \mathbb{N}$, *le sous-groupe* ζ_{i+1} *tel que :*

$$\frac{\zeta_{i+1}(G)}{\zeta_i(G)} = \zeta\left(\frac{G}{\zeta_i(G)}\right)$$

et ζ_{i+1} *est caractéristique dans G.*

On détermine ainsi une chaîne croissante de sous-groupe de G :

$$(e) = \zeta_0 \leqslant \zeta_1 \leqslant \cdots \leqslant \zeta_i \leqslant \zeta_{i+1} \leqslant \cdots \tag{2.3}$$

dans laquelle, pour tout $i \in \mathbb{N}$, *on a* $\zeta_i \sqsubset G$, *donc* $\zeta_i \lhd G$ *et* ζ_{i+1} *est le plus grand sous-groupe de G contenant* ζ_i, *tel que :*

$$[\zeta_{i+1}, G] \leqslant \zeta_i$$

S'il existe un entier $s \geqslant 0$ *tel que* $\zeta_s = G$, *la chaîne (2.3)s'écrit :*

$$(e) = \zeta_0 \leqslant \zeta_1 \leqslant \cdots \leqslant \zeta_{s-1} \leqslant \zeta_s = G \tag{2.4}$$

et, d'après ce qui précède, (2.4) est une suite centrale de G.

En générale, la suite centrale ascendante de G est la suite croissante $(\zeta_k(G))_{k \geqslant 0}$ *de sous-groupes normaux de G.*

Définition 2.4 *On dit qu'un groupe G a une suite centrale ascendante de longueur s* ($s \geq 1$ *dans* $\mathbb{N}$), *si la chaine croissante (2.3) s'écrit :*

$$(e) = \zeta_0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_{s-1} < \zeta_s = G; \tag{2.5}$$

le groupe G est alors nilpotent.

Remarque 2.1 *Le groupe $G = (e)$ sera considéré comme ayant une suite centrale descendante (resp, ascendante) de longueur* 0.

Définition 2.5 *s'il existe un entier $s \geqslant 0$ tq $\zeta_s(G) = G$, on dit que G est nilpotent, le plus petit entier $s \geqslant 0$ tq $\zeta_s(G) = G$ est appelé la classe de nilpotence de G.*
Bien sur si $s = 0$ on a $\zeta_0(G) = G = 1$ donc le groupe trivial est nilpotent de classe 0.
Et si $s = 1$ on a $\zeta_1(G) = \zeta(G) = G$ donc G est abélien alors les groupes nilpotents de classe 1 *sont les groupes abéliens.*

Proposition 2.2 *Si G est un groupe les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) G est nilpotent de classe $\leqslant s$;

ii) il existe une suite finie $(H_k)_{k=0,\dots,s}$ de sous groupes normaux de G tel que :

$$1 = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \cdots \leqslant H_{s-1} \leqslant H_s = G$$

avec :

$$\frac{H_{k+1}}{H_k} = \zeta\left(\frac{G}{H_k}\right), \text{ pour } k = 0, ..., s-1$$

Preuve.

i) $\Longrightarrow$ *ii)* Il suffit de prendre $H_k = \zeta_k$ pour $k = 0, ..., s-1$.
ii) $\Longrightarrow$ *i)* Par récurrence sur k on montre que $H_k \subseteq \zeta_k(G)$ avec $k = 0, ..., s-1$.

1- Pour $k = 0$ on a :

$$\{1\} = H_0 \subseteq \zeta_0(G) = \{1\}.$$

2- On suppose que $H_k \subseteq \zeta_k(G)$ et soit $h \in H_{k+1}$ et $x \in G$ or :

$$\frac{H_{k+1}}{H_k} \leqslant \zeta\left(\frac{G}{H_k}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\bar{h} \in \zeta\left(\frac{G}{H_k}\right) &\Rightarrow \bar{h}\bar{x} = \bar{x}\bar{h} \\
&\Rightarrow \overline{hx} = \overline{xh} \\
&\Rightarrow h^{-1}x^{-1}hx.H_k = H_k \\
&\Rightarrow [h, x] \in H_k \subseteq \zeta_k(G) \text{ (d'aprés l'hypothèse de récurrence)} \\
&\Rightarrow [h, x]\zeta_k(G) = \zeta_k(G)) \\
&\Rightarrow h^{-1}x^{-1}hx.\zeta_k(G) = \zeta_k(G) \\
&\Rightarrow hx.\zeta_k(G) = xh.\zeta_k(G) \\
&\Rightarrow h\zeta_k(G)x\zeta_k(G) = x\zeta_k(G)h\zeta_k(G) \\
&\Rightarrow h\zeta_k(G) \in \zeta\left(\frac{G}{\zeta_k(G)}\right) = \frac{\zeta_{k+1}(G)}{\zeta_k(G)} \\
&\Rightarrow h \in \zeta_{k+1}(G) \text{ d'où } H_{k+1} \subseteq \zeta_{k+1}(G).
\end{aligned}$$

D'où $H_k \subseteq \zeta_k(G)$ pour $k = 0, ..., s-1$.

Alors $G = H_s \subseteq \zeta_s(G) = G \Rightarrow G$ est nilpotent de classe $\leqslant s$.

■

2.2.2 Suite centrale descendante

G étant un groupe, posons :

$$\gamma_1(G) = G, \ \gamma_2(G) = [G, G] = G', \ \gamma_3(G) = [\gamma_2(G), G]$$

et d'une façon générale :

$$\gamma_{k+1}(G) = [\gamma_k(G), G], \ \forall \ k \in \mathbb{N}^* \tag{2.6}$$

Vérifiant par récurrence que les sous-groupes $\gamma_k(G)$ sont normaux dans G.

- Pour $k = 1$ on a $\gamma_2(G) = [G, G] = G' \lhd G$.
- Supposons que $\gamma_k(G) \lhd G$ pour $k \geqslant 1$.

On a $\gamma_{k+1}(G)$ est engendré par les éléments de la forme : $[y, x]$ (tel que : $y \in \gamma_k(G)$, $x \in G$) il suffit de montrer que :

$$z^{-1}[y, x] z \in \gamma_{k+1}(G), \ \text{pour } z \in G$$

On a :

$$\begin{aligned} z^{-1}[y, x] z &= [y, x]^z = [y^z, x^z] \\ &= \left[z^{-1}yz, z^{-1}xz\right] \in \ \gamma_{k+1}(G). \end{aligned}$$

Il en résulte : $\gamma_k(G) \lhd G$ pour $k \geqslant 1$.

De plus la suite $(\gamma_k(G))_{k \geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion car pour $x \in G$,

$y \in \gamma_k(G)$ on a :

$$[y,x] = y^{-1}\left(x^{-1}yx\right) \in \gamma_k(G)$$

d'où $\gamma_{k+1}(G) \leqslant \gamma_k(G)$ par définition :
La suite $(\gamma_k(G))_{k\geqslant 1}$ est dite la suite centrale descendante de G.

Proposition 2.3 *le groupe G est nilpotent si et seulement si la suite* $(\gamma_k(G))_{k\geq 1}$ *atteint le sous groupe réduit à l'élément neutre.*
Le plus petit élément $n \geq 1$ *tel que* $\gamma_{n+1}(G) = \{1\}$ *est la classe de nilpotence de G.*

Preuve. Supposons d'abord que G est nilpotent de classe n et montrons à l'aide d'une récurrence sur k l'inclusion $\gamma_k(G) \leqslant \zeta_{n-k+1}(G)$ pour $(1 \leqslant k \leqslant n+1)$.

- Pour $k = 1$, on a $\gamma_1(G) = G = \zeta_n(G)$, d'où l'inclusion. Supposons que $\gamma_k(G)$ est inclus dans $\zeta_{n-k+1}(G)$ pour un entier k fixé ; pour établir l'inclusion $\gamma_{k+1}(G) \leqslant \zeta_{n-1}(G)$, il suffit de montrer que $[y,x]$ est dans $\zeta_{n-1}(G)$ pour tout $x \in G$ et $y \in \gamma_k(G)$. Or, $\zeta_{n-k+1}(G)/\zeta_{n-k}(G) \leq \zeta(G/\zeta_{n-k}(G))$ et $y \in \zeta_{n-k+1}(G)$ d'après l'hypothèse de récurrence d'où $[y,x] \in \zeta_{n-k}(G)$.

- Pour $k = n+1$, l'inclusion qui vient d'être montré donne $\gamma_{n+1}(G) \leqslant \zeta_0(G)$, d'où $\gamma_{n+1}(G) = \{1\}$ car $\zeta_0(G) = \{1\}$. De plus, si $m \geqslant 0$ est le plus petit entier tel que $\gamma_{m+1}(G) = \{1\}$, on a $m \leqslant n$.
  Supposons maintenant que la suite $(\gamma_k(G))_{k\geqslant 1}$ atteint le sous-groupe réduit à l'unité et notons m le plus petit entier tel que $\gamma_{m+1} = \{1\}$. La suite $(H_k)_{k=0,1,\ldots,m}$ définie par $H_k = \gamma_{m-k+1}(G)$ est constituée de

sous-groupes normaux de G tels que :

$$\{1\} = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \cdots \leqslant H_{m-1} \leqslant H_m = G.$$

De plus, pour $x \in G$, $y \in H_{k+1}$ (*i.e.* $y \in \gamma_{m-k}(G)$) on a $[y,x] \in \gamma_{m-k+1}(G)$ (*i.e.* $[y,x] \in H_k$). En d'autre termes, on a établi l'inclusion $H_{k+1}/H_k \leq \zeta(G/H_k)$ pour tout entier $k \in \{0,1,...,m-1\}$. D'après la proposition (2.2),G est nilpotent de classe $n \leqslant m$, d'où le résultat.

■

2.3 Groupes nilpotents

Proposition 2.4 *Pour tout x, y, z dans un groupe, on a les relations :*

$$[x^{\alpha}, y^{\beta}] = x^{(1-\alpha)/2}y^{(1-\beta)/2}[x,y]^{\alpha\beta}y^{(\beta-1)/2}x^{(\alpha-1)/2}(\alpha, \beta \in -1, 1)$$

$$[x, yz] = [x,z][x,y]^{z}$$

$$[xy, z] = [x,z]^{y}[y,z] \tag{2.7}$$

$$[x, y^{-1}, z]^{y}[y, z^{-1}, x]^{z}[z, x^{-1}, y]^{x} = 1$$

Proposition 2.5 *Si un groupe G est engendré par une partie $S \subseteq G$ alors $\gamma_n(G)$*

est engendré par les éléments de la forme :

$$x^{-1}[a_1, a_2, ..., a_n]x.$$

tel que $a_1, ..., a_n \in S$ *et* $x \in G$.

Lemme 2.1 *Soit* H *et* K *deux sous-groupes normaux de* G *engendrés respectivement par* $R \subseteq H$ *et* $S \subseteq K$ *alors* $[H, K]$ *est engendré par les éléments de la forme* $x^{-1}[a, b]x$ *tel que* $a \in R, b \in S$ *et* $x \in G$.

Corollaire 2.1 *Soit* G *un groupe engendré par une partie* $S \subseteq G$*, supposons que pour un entier fixé* $n > 0$*, on ait* $[a_1, \cdots, a_n] = 1$ *pour tout* $a_1, ..., a_n \in S$ *alors* G *est nilpotent de classe* $< n$.

Preuve. Appliquons la proposition (2.5) on trouve directement γ_n est engendré par les éléments de la forme $x^{-1}[a_1, ..., a_n]x = x^{-1}1x = 1$ alors : $\gamma_n = \langle 1 \rangle$ d'où G est nilpotent de classe $< n$. ■

Proposition 2.6 *Pour tout entier* $n \geqslant 1$*,* $\gamma_n(G)$ *est engendré par les éléments de la forme* $[x_1, ..., x_n]$ *tel que* $x_1, ..., x_n \in G$.

Preuve. appliquons la proposition (2.5) en prenant $S = G$ on déduit que $\gamma_n(G)$ est engendré par les éléments de la forme $x^{-1}[a_1, \cdots, a_n]x$ tel que $a_1, ..., a_n \in G$ et $x \in G$
Mais $x^{-1}[a_1, ..., a_n]x = [x^{-1}a_1x, ..., x^{-1}a_nx] = [x_1, ..., x_n]$
$x_1, ..., x_n \in G$ et $x \in G$. ■

Les proposition (2.3) et (2.6) conduisent une nouvelle caractérisation des groupes nilpotents :

Corollaire 2.2 *Un groupe G est nilpotent si et seulement si il existe un entier $n \geq 1$ tel que $[x_1, ..., x_n] = 1$ quel que soit $x_1, ..., x_n \in G$. Si n est le plus petit entier vérifiant cette condition, la classe de nilpotence de G est égale à $n - 1$.*

De cette caractérisation, on déduit immédiatement les corollaires :

Corollaire 2.3 *Soient G est un groupe nilpotent de classe n et H un sous-groupe de G. Alors :*

(i) H est nilpotent de classe $\leqslant n$.

(ii) Si H est normal dans G, G/H est nilpotent de classe $\leqslant n$.

Corollaire 2.4 *Soient $G_1, ..., G_k$ des groupes nilpotents de classes respectives $n_1, ..., n_k$. Alors, le produit direct $G_1 \times \cdots \times G_k$ est nilpotent, de classe $max(n_1, ..., n_k)$.*

Preuve. $\forall\, i \in \overline{1, k}$: G_i nilpotent $\Rightarrow$ $\exists\, n \geqslant 1$ tel que $[x_{1i}, ..., x_{ni}] = 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ [(x_{11}, ..., x_{1k}), ..., (x_{n1}, ..., x_{nk})] &= ([x_{11}, ..., x_{1k}], ..., [x_{n1}, ..., x_{nk}]) \\ &= (1_{G_1}, ..., 1_{G_k}) \\ &= 1_{G_1 \times \cdots \times G_k}. \end{aligned}$$

d'où $G_1 \times \cdots \times G_k$ est nilpotent de classe *max* $(n_1, ..., n_k)$. ■

Corollaire 2.5 *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G inclus dans $\zeta(G)$ (H est donc normal dans G). Si G/H est nilpotent de classe n, alors G est nilpotent de classe $\leqslant n + 1$.*

Preuve. Pour tout $x_1, ..., x_n \in G$, on a $[x_1, ..., x_n] \in H$, d'où, pour tout $x_{n+1} \in G$
$[x_1, ..., x_n, x_{n+1}] = 1$ car $H \leqslant \zeta(G)$. ■

Proposition 2.7 *Pour tout groupe G, pour tout entier $r, s \geqslant 1$, on a l'inclusion*

$$[\gamma_r(G), \gamma_s(G)] \leqslant \gamma_{r+s}(G).$$

2.3.1 Nilpotence et Résolubilité

Proposition 2.8 *Si H est un sous-groupe de G, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) H est normal dans G est G/H est abélien ;

(ii) $G' \leqslant H$.

Preuve. (*i*) ⇒ (*ii*) Si G/H est abélien, on a $[x, y] \in H$ pour tout $x, y \in G$, d'où l'inclusion $G' \leqslant H$.
(*ii*) ⇒ (*i*) Pour $x \in G, h \in H$, on a $x^{-1}hx = h[h, x] \in H$ car $[h, x] \in H$ donc H est normal dans G.
De plus, $[x, y]$ est dans H pour tout $x, y \in G$, donc G/H est abélien. ■ Le lemme suivant se montre facilement par récurrence :

Lemme 2.2 *Si $f : G_1 \longrightarrow G_2$ est un homomorphisme de groupe, on a $f(G^k) = (f(G))^k$ pour tout entier $k \geqslant 0$.*

Proposition 2.9 *Tout groupe nilpotent est résoluble.*

Preuve. C'est une conséquence du résultat : pour tout groupe G et pour tout entier $k \geqslant 0$, on a l'inclusion $G^k \leqslant \gamma_{2^k}(G)$. En effet, si G est nilpotent de classe c, on choisissant k tel que $2^k > c$, on aura $G^{(k)} = 1$.

Montrons donc par récurrence l'inclusion précédente :

1- Pour $k = 0$, le résultat est trivial.

2- Supposons que $G^k \leqslant \gamma_{2^k}(G)$, on a alors $G^{k+1} = [G^k, G^k] \leqslant [\gamma_{2^k}, \gamma_{2^k}]$. Mais $[\gamma_{2^k}, \gamma_{2^k}] \leqslant \gamma_{2^k+2^k} \leqslant \gamma_{2^{k+1}}(G)$ d'après la proposition (2.7), d'où l'inclusion :
$G^{(k+1)} \leqslant \gamma_{2^{k+1}}(G)$.

■

2.3.2 Quelques propriétés des groupes nilpotents

Proposition 2.10 *Soient G un groupe nilpotent et H un sous-groupe normal de G. Alors, si H est distinct de* $\{1\}$, $H \cap \zeta(G)$ *est aussi distinct de* 1.

Preuve. Soit $h \in H \backslash \{1\}$. Considérons l'ensemble E des entiers $n > 0$ vérifiant :

$$[h, x_1, ..., x_n] = 1 \text{ pour tout } x_1, ..., x_n \in G.$$

Cet ensemble étant non vide (il contient tout entier supérieur ou égal à la classe de nilpotence de G), notons k son plus petit élément. L'entier $k-1$ n'est pas dans E : il existe donc des éléments $a_1, ..., a_{k-1}$ dans G tels que $u = [h, a_1, ..., a_{k-1}] \neq 1$ ($u = h$ si $k = 1$). Par contre k est dans E, d'où l'égalité $[u, x_k] = [h, a_1, ..., a_{k-1}, x_k] = 1$ pour tout $x_k \in G$. En d'autres termes, l'élément u est dans $\zeta(G)$. Mais il est aussi dans H ($h \in H$ et $H \trianglelefteq G$), d'où l'existence d'un élément distinct de 1 dans $H \cap \zeta(G)$. ■

Proposition 2.11 *Dans un groupe nilpotent, si deux éléments sont d'ordres finis premiers entres eux, ces éléments commutent.*

Preuve. Le résultat est trivial pour les groupes abéliens. Considérons un groupe nilpotent G de classe $c > 1$ et supposons la proposition établie pour les groupes de classe $c - 1$. Soient $x, y \in G$ d'ordres finis premiers entre eux. Cette propriété est conservée pour les classes de x, y dans $G/\zeta(G)$. De plus, la classe de nilpotence de $G/\zeta(G)$ est égale à $c - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, les classes de x et y commutent dans $G/\zeta(G)$. En d'autres termes, on a $[x, y] \in \zeta(G)$. Si n est un entier positif, en utilisant la relation (2.7) de la Proposition (2.4), on peut alors écrire :

$$[x^{n+1}, y] = [xx^n, y] = [x, y]^{x^n}[x^n, y] = [x, y][x^n, y].$$

Par une récurrence sur n, on en déduit l'égalité $[x^n, y] = [x, y]^n$. Notons a l'ordre de x. En faisant $n = a$ dans l'égalité précédente, on obtient $[x, y]^a = 1$. Il en résulte que $[x, y]$ est un élément d'ordre fini, diviseur de a. Si b est l'ordre de y, un calcul analogue montre que $[x, y]$ est d'ordre fini, diviseur de b. Mais a et b sont premiers entre eux, donc $[x, y]$ est d'ordre 1, d'où $[x, y] = 1$. ■

Proposition 2.12 *Soient x et y deux éléments d'ordres finis dans un groupe nilpotent de classe $\leqslant c$, Alors, si $e > 0$ est un entier tel que $x^e = y^e = 1$, on a $(xy)^{e^c} = 1$.*

Dans un groupe quelconque, le produit de deux éléments d'ordres finis n'est pas nécessairement d'ordre fini. En particulier, l'ensemble des éléments d'ordres finis ne constitue pas nécessairement un sous-groupe. Par contre, dans un groupe nilpotent, le produit de deux éléments d'ordres finis est d'ordre fini : c'est une conséquence de la proposition précédente, en prenant pour e le plus petit multiple commun des ordres de chaque élément. De plus, l'élément neutre est d'ordre fini égal à 1 et clairement l'inverse d'un élément d'ordre fini est d'ordre fini. Une conséquence de la Proposition (2.12) est donc le

Corollaire 2.6 *Dans un groupe nilpotent G, l'ensemble des éléments d'ordres finis est un sous-groupe.*

Ce sous-groupe est appelé le sous-groupe de torsion de G et il est sera noté ici $T(G)$. Il est clair que $T(G)$ est normal dans G et que dans $G/T(G)$, l'élément neutre est le seul élément d'ordre fini (on dit qu'un tel groupe est sans torsion).

Proposition 2.13 *(Théorème de Fitting). Soient $H_1, ..., H_k$ des sous-groupes normaux d'un groupe G. Si ces sous-groupes sont nilpotents de classes respectives $c_1, ..., c_k$, alors $H_1 \cdots H_k$ est nilpotent de classe au plus $c_1 + \cdots + c_k$.*

Par définition, le sous-groupe de Fitting d'un groupe G est le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes normaux nilpotents de G. Ce sous-groupe est normal (et même caractéristique) dans G mais il n'est pas nécessairement nilpotent. Cependant, si G ne contient qu'un nombre fini de sous-groupes normaux nilpotents, son sous-groupe de Fitting est nilpotent d'après le résultat précédent ; c'est par exemple le cas si G est fini.

Proposition 2.14 *Le centre d'un p-groupe fini $G \neq \{1\}$ n'est pas réduit à $\{1\}$.*

Corollaire 2.7 *Un p-groupe fini est nilpotent.*

Preuve. Soit G un p-groupe d'ordre p^n $(n \geqslant 0)$. Raisonnons par récurrence sur n. Si $n = 0$, G est nilpotent ($G = \{1\}$). Considérons maintenant un entier $n > 0$ et supposons que tous les p-groupes d'ordre $p^{n'}$ sont nilpotents (pour tout entier $n' < n$). D'après la proposition précédente, $\zeta(G) \neq \{1\}$, donc $G/\zeta(G)$ est d'ordre $p^{n'}$ $(n' < n)$; le groupe $G/\zeta(G)$ est donc nilpotent. Le Corollaire (2.5) montre qu'il en est de même pour G.■