Résolution de système d'équations linéaires

Via Méthodes directes

1. Ax=b en représentation matricielle :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \ddots + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$$

2. La matrice A du système
   - $\neq$ Triangulaire inférieure
   - $\neq$ Triangulaire supérieure

3. Une méthode de résolution d'un système linéaire est dite directe si la solution du système peut être obtenue en un nombre fini d'opérations

Résolution de système d'équations linéaires

Via l'inverse de la matrice du système

$$X = A^{-1}b,$$

$T_{inverse} = n\,!\,(n^2 + n + 1) + 3n^2 - 1$ Opérations élémentaires,

$A \in M_n(\mathbb{K})$	Nombre d'opérations élémentaires
n=3	$\mathrm{T_{inverse}} = 104$
n=4	$\mathrm{T_{inverse}} = 551$
n=5	$\mathrm{T_{inverse}} = 3790$
n=10	$\mathrm{T_{inverse}} \sim 4.\,10^8$

Résolution de système d'équations linéaires

Via Méthode de Cramer

$$x_i = \frac{1}{det\,A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,\boldsymbol{i-1}} & \boldsymbol{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,\boldsymbol{i-1}} & \boldsymbol{b_2} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,\boldsymbol{i-1}} & \boldsymbol{b_3} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\boldsymbol{i-1}} & \boldsymbol{b_{n-1}} & \cdots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,\boldsymbol{i-1}} & \boldsymbol{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemple

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} \qquad \text{det D} = -36$$

$$x_1 = \frac{-1}{36}\begin{vmatrix} 10 & 4 & 7 \\ 20 & 4 & 8 \\ 30 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad x_2 = \frac{-1}{36}\begin{vmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 2 & 20 & 8 \\ 3 & 30 & 9 \end{vmatrix} \quad x_3 = \frac{-1}{36}\begin{vmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \\ 3 & 6 & 30 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = -3.3333 \qquad x_2 = 6.6667 \qquad x_3 = 0$$

Méthodes directes : Méthode de Cramer

La résolution du système nécessite au total :

$$T_{Cramer} = (n+1)^2 . n! - 1 \text{ opérations élémentaires}$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$	Nombre opérations élémentaires
n=3	$T_{Cramer} = 95$
n=4	$T_{Cramer} = 599$
n=5	$T_{Cramer} = 4319$
n=10	$T_{Cramer} \sim 4.10^8$

La méthode devient très lente en temps d'exécution (de calculs) dès que n dépasse 4.

➔ n'est donc pas plus avantageuse que le calcul de l'inverse.

Méthodes directes : Méthode d'élimination de Gauss

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\
a_{n-1}x_1 & + & a_{n-1\,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n-1n}x_n & = & b_{n-1} \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n\,2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

$$\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n-1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1n} \\
a_{n1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n-1\,n} & a_{nn}
\end{matrix} \times \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{matrix}}$$

Objectif : Ax=b → Rx=c

Avec R matrice triangulaire supérieure.

$$A^{(0)}x = b^{(0)}$$

(étape1) → résultat $A^{(1)}x = b^{(1)}$

(étape i)→ résultat $A^{(i)}x = b^{(i)}$

(étape finale)→ $\mathbf{A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}}$

$$\begin{matrix}
r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1n} \\
0 & r_{22} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2n} \\
0 & 0 & \ddots & r_{3,n-1} & r_{3,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & r_{n-1,n-1} & r_{n-1n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & r_{nn}
\end{matrix} \times \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{matrix}}$$

Méthode d'élimination de Gauss

Exemple : Résoudre le système suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & & 11 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & 13 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & 14 \end{array} \qquad A^{(0)}x = b^{(0)}$$

La représentation matricielle augmentée [A b]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Etape 1 :

<u>Travailler sur</u> 1ère colonne (j=1) sur $\boldsymbol{A^{(0)}x = b^{(0)}}$

<u>Objectif</u> Eliminer les coefficients $a_{i1}^{(1)}$ $\quad i = 2{:}n$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$

<u>Comment ?</u>

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 & 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 & 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & 14 \end{cases} = \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 = L_2 - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} L_1 \\ L_3 = L_3 - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} L_1 \\ L_4 = L_4 - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{1}} L_1 \end{matrix}$$

En représentation matricielle : $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 & \\ (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 11) & \times \; \mathbf{2}/\boxed{\mathbf{1}} \\ (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 11) & \times \; \mathbf{3}/\boxed{\mathbf{1}} \\ (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 11) & \times \; \mathbf{4}/\boxed{\mathbf{1}} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 22 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 33 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 44 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{matrix}$$

Etape 1 : **<u>Travailler sur</u>** **1ère colonne (j=1) sur** $\boldsymbol{A^{(0)}x = b^{(0)}}$

<u>Objectif</u> Eliminer les coefficients $a_{i1}^{(1)}$ de $A^{(1)}$, $i = 2{:}n$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$

<u>Principe</u>

- vérifier le pivot $\boxed{\boldsymbol{a_{11}^{(0)}} \neq 0}$ $a_{11}^{(0)} = 1 \neq 0$
- Pour chaque ligne L_i , $i = 2 : n$,

Retrancher la ligne L_1 multipliée par $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ comme suit ::

pour i=2 : $L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} L_1 \rightarrow$ résultat : $\begin{matrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \dots \\ a_{31} & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots \end{matrix}$

pour i=3 : $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} L_1 \rightarrow$ résultat : $\begin{matrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots \end{matrix}$

pour i= n : $L_n \leftarrow L_n - \dfrac{a_{n1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} L_1 \rightarrow$ résultat : $\begin{matrix} a_{11} & \dots \\ 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots \end{matrix}$

Comment ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \end{cases} = \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 = L_2 - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} L_1 \\ L_3 = L_3 - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}} L_1 \\ L_4 = L_4 - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{1}} L_1 \end{matrix}$$

En représentation matricielle : $\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{1}} & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 11) \times \mathbf{2}/\boxed{\mathbf{1}} \\ (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 11) \times \mathbf{3}/\boxed{\mathbf{1}} \\ (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 11) \times \mathbf{4}/\boxed{\mathbf{1}} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 22 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 33 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 44 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{matrix}$$

$$A^{(1)}x = b^{(1)} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{matrix}$$

Etape 2 : travailler sur 2ème colonne J=2 de $\boldsymbol{A^{(1)}x = b^{(1)}}$

<u>Objectif</u> : Eliminer les coefficients $a_{i2}^{(2)}$ $i = 3 : n$

<u>Principe :</u>

1. Vérifier le pivot : $a_{22}^{(1)} \neq 0$
2. Pour chaque ligne $L_{i,}$ n=3 :4

Retrancher la ligne L_2 multipliée par $\dfrac{a_{i2}}{a_{22}}$

$$\text{Pour i=3: } L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2 \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ 0 & \boxed{a_{22}} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{42} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots \end{matrix}$$

$$\text{Pour i=4 : } L_4 \leftarrow L_4 - \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} L_2 \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots \end{matrix}$$

Comment ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ \qquad \boxed{-x_2} - 2x_3 - 7x_4 \\ \qquad -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 \\ \qquad -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 \end{cases} = \begin{matrix} 11 \\ -10 \\ -20 \\ -30 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 = L_3 - \frac{(-\mathbf{2})}{(-\mathbf{1})} L_2 \\ L_4 = L_4 - \frac{(-\mathbf{7})}{(-\mathbf{1})} L_2 \end{matrix}$$

En représentation matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & \boxed{\mathbf{-1}} & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / & / & / & / & / & \\ / & / & / & / & / & \\ (0 & -1 & -2 & -7 & -10) & \times\ \mathbf{-2}/\boxed{\mathbf{-1}} \\ (0 & -1 & -2 & -7 & -10) & \times\ \mathbf{-7}/\boxed{\mathbf{-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ (0 & -2 & -4 & -14 & -20) \\ (0 & -7 & -14 & -49 & -70) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -7 & -10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 & 36 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \qquad A^{(2)}x = b^{(2)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -7 & -10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 & 36 & 40 \end{bmatrix}$$

Etape (n-1) : Travailler sur la (n-1)ème colonne ou j= n-1

Etape (3) : Travailler sur la (3)ème colonne j =3 du système $A^{(2)}x = b^{(2)}$

Objectif : Eliminer les coefficients $a_{i,n-1}^{(n-1)} \quad i = n = 4$

Principe

1. Vérifier le pivot $a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \neq 0$

2. Retrancher de chaque ligne $L_{i,}$ i = j+1 : n, la ligne L_{n-1} multipliée par $\dfrac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n-1}}$

Pour i=n : $L_n \leftarrow L_n - \dfrac{a_{i,n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \; L_{n-1}$

Résultat

$$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)} \qquad \begin{matrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,n-1} & r_{1n} & c_1 \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2,n-1} & r_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{n-1,n-1} & r_{n-1n} & c_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{nn} & c_{nn} \end{matrix}$$

Comment ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & 11 \\ \quad -x_2 - 2x_3 - 7x_4 & -10 \\ \quad\quad \boxed{-\mathbf{4x_3}} + 4x_4 & 0 \\ \quad\quad 4x_3 + 36x_4 & 40 \end{cases} = \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 = L_4 - \frac{(\mathbf{4})}{(\mathbf{-4})} L_3 \end{matrix}$$

En représentation matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{-\mathbf{4}} & +4 & 0 \\ 0 & 0 & +4 & +36 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ (0 & 0 & -4 & +4 & 0) \times \mathbf{4}/\boxed{-\mathbf{4}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{-\mathbf{4}} & +4 & 0 \\ 0 & 0 & +4 & +36 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ / & / & / & / & / \\ (0 & 0 & +4 & -4 & 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -7 & -10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)}x = b^{(3)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{bmatrix}$$

Etape finale

1. Vérifier le déterminant du nouveau système

$$\det A = \prod_{j=1}^{j=n} a_{jj}^{(n-1)} ;$$

2. Résoudre le nouveau système par la méthode de remontée

x4= 1,

x3= 1,

x2= 1 ,

x1= 2

Méthode d'élimination de Gauss (Récapitulatif)

On passe par deux phases : (1) Triangularisation, (2)une remontée (solution d'un système triangulaire)

Triangularisation

- On commence avec A une matrice d'ordre n (les mêmes opérations seront effectuées sur le vecteur b.
- Il y'a n systèmes : système initial (0) → système final (n-1) triangulaire supérieur.
- A l'étape j, on annule les coefficients sous la diagonale de la colonne j
- <u>comment</u> à chaque ligne i>j, on soustrait la ligne j multipliée par $\dfrac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}$

$\forall k,\ j \le k \le n$ $\quad \boxed{j < i \le n \quad \text{on a } a_{ij}^{(j)} = 0}$

$$\boxed{a_{ik}^{(j)} = a_{ik}^{(j-1)} - \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}\, a_{jk}^{(j-1)}} \quad \text{et} \quad b_i^{(j)} = b_i^{(j-1)} - \frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} b_j^{(j-1)}$$

<u>Pseudo code</u>

Parcours des colonnes j =1 : n-1

Vérifier pivot $a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$

Parcours des lignes i=j+1 : n

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,j}^{(j-1)}}{a_{j,j}^{(j-1)}}\ L_j$$

Remarque 1

On ne change pas la solution d'un système linéaire lorsque :

- On permute deux lignes
- On permute deux colonnes
- On multiplie une ligne par un réel non nul
- On ajoute une ligne à une autre

Remarque 2

Problème : méthode de Gauss limitée lorsque le pivot $a_{k+1,k+1}^{(k)} = 0$

Résolu par : $L_{k+1}^{(k)} \leftrightarrow L_i^{(k)}$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ dans } \quad [A^{(0)} b^{(0)}] \quad a_{11} = 0 \quad \text{donc} \quad L_2^{(0)} \leftrightarrow L_1^{(0)}$$

Résultat :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} [A^{(0)} b^{(0)}] \quad L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{1} L_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} [A^{(1)} b^{(1)}]$$

.....

Remarque 3

La méthode d'élimination de Gauss permet de résoudre un système linéaire en effectuant un nombre d'opération élémentaires estimés à $T_{Gauss} = (4n^3 + 9n^2 - 7n)/6$,

Ce qui montre l'énorme amélioration que cette méthode apporte par rapport aux autres méthodes.

$A \in M_n(\mathbb{K})$	Nombre d'opération
n=3	T_{Gauss} =28
n=4	T_{Gauss} =62
n=5	T_{Gauss} = 115
n=10	T_{Gauss} = 805

Remarque 4

En utilisant la méthode de Gauss le calcul du déterminant de la matrice A est comme suit :

$\det A = (-1)^p \prod_{k=1}^{k=n} a_{kk}^{(k)}$; ; où p est le nombre de permutations