METHODES DIRECTES DE RESOLUTION

DE SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

L'application de loin la plus fréquente des matrices est la représentation et la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Liens entre système d'équations linéaires et matrice

Soit le système à trois équations et trois inconnus :

$$\begin{cases} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & = & b_2 \\ a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

On peut représenter ce système sous forme d'une équation matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \qquad\qquad \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{b}$$

Liens entre système d'équations linéaires et matrice

- La matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite : **matrice du système**,
- b est un vecteur de$\mathbb{K}^n$ dit: **second membre du système**
- Le vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur **des inconnues du système**.

Exemple

$$\begin{cases} 5x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 20 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

<u>Matrice du système</u> $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

OBJECTIF :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = ????$$

<u>Inconnus du système</u> $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

<u>Second membre du système</u> $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

Résolution de système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 5x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 20 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

SOLUTION :

OBJECTIF :

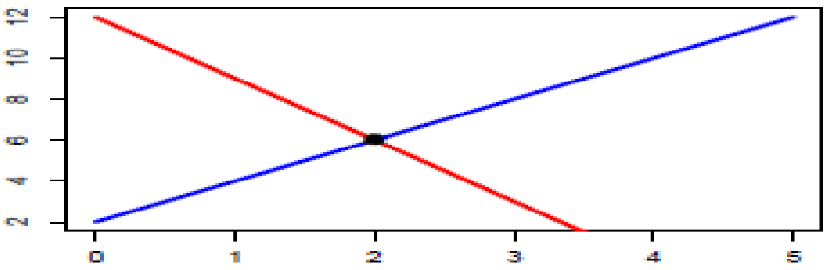
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = ????$$

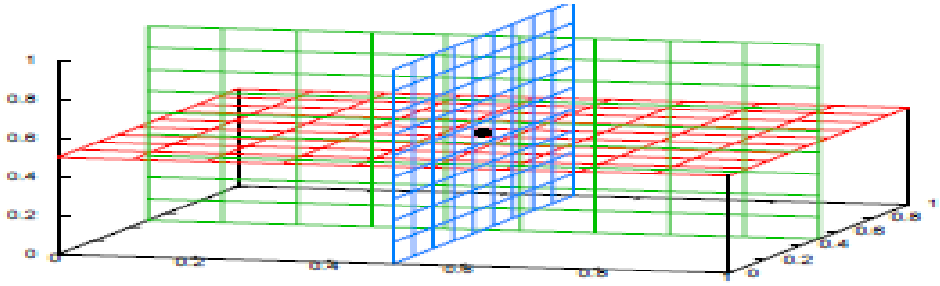
$$\mathrm{X} = A^{-1} \,.\, b$$

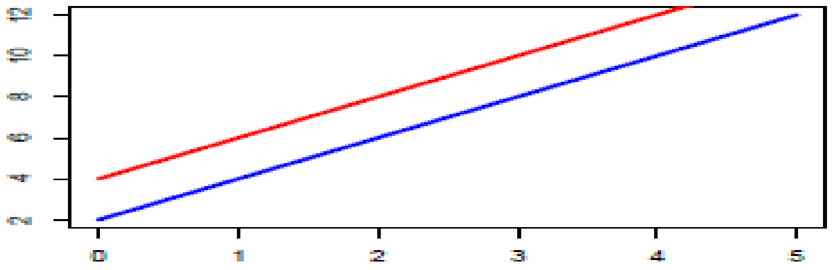
$$X = \mathrm{inv}(A) * b$$

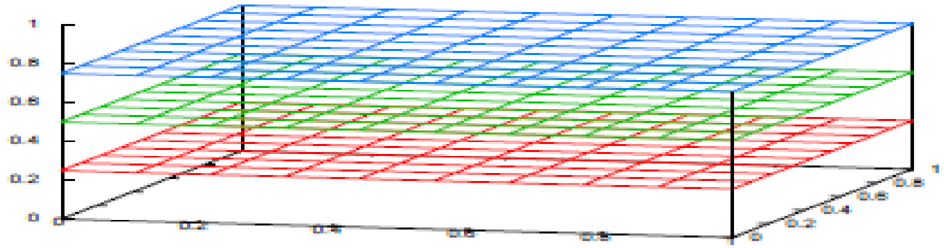
$$X = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1667 & -0.1111 \\ -0.1667 & -0.6667 & 0.7222 \\ 0.0000 & 0.5000 & -0.3333 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.3333 \\ 6.6666 \\ 0 \end{bmatrix}$$

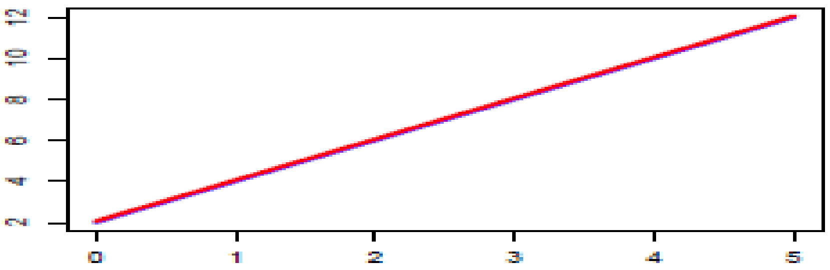
Résolution de système d’équations linéaires



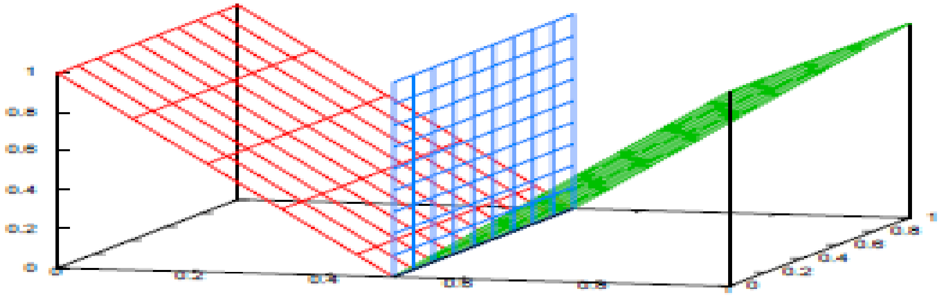








(droites superposées)



Résolution de système d’équations linéaires

det(A)≠0:

La matrice est inversible, ce qui signifie que le système a une **solution unique**.

det(A)=0:

- Soit il n'a **aucune solution**.
- Soit le système accepte une **infinité de solutions**.

Résolution de système triangulaire inférieure

Soit le système d'équation suivant à résoudre :

$$\begin{cases} a_{11}\boldsymbol{x_1} & + & \mathbf{0} & + & \mathbf{0} & + & \cdots & \mathbf{0} & & b_1 \\ a_{21}\boldsymbol{x_1} & + & a_{22}\boldsymbol{x_2} & + & \cdots & + & \cdots & \mathbf{0} & & b_2 \\ a_{31}\boldsymbol{x_1} & + & a_{32}\boldsymbol{x_2} & + & a_{33}\boldsymbol{x_3} & + & \cdots & \mathbf{0} & = & b_3 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{x_1} & + & a_{n2}\boldsymbol{x_2} & + & \cdots & + & \cdots & a_{nn}\boldsymbol{x_n} & & b_n \end{cases}$$

Exemple: un système à 4 inconnus

$$\begin{array}{ccccccccc} -3x_1 & & & & & & & = & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & & & = & -4 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{array}$$

Résolution de système triangulaire inférieure

$$\begin{cases} -3x_1 & & & & & & & = & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & & & & & = & -4 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & -3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{-10}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\,(-4 - 2x_1) = \frac{1}{4}\left(-4 + \frac{20}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\,(8 - (1.\,x_1 - 3.\,x_2\,)) = \frac{1}{2}\left(8 - (1.\frac{-10}{3} - 3.\frac{2}{3})\right) = \frac{20}{3}$$

$$x_4 = \frac{1}{1}\left(-3 - (\frac{40}{3} + \frac{10}{3} + 6x_3\right) = \frac{-179}{3}$$

Résolution de système triangulaire inférieure

$$\begin{cases} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & = & b_2 \\ a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & = & b_3 \\ a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & = & b_4 \end{cases}$$

via <u>matrice triangulaire inférieure</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\ (b_2 - a_{21}x_1)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\ (b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2))$$

$$x_4 = \frac{1}{a_{44}}\ (b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3))$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}}}$$

Résolution de système triangulaire inférieure

Méthode de descente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

- Calculer x1
- Calculer les x_i (les lignes $i = 2 : n$)
  - Parcours des j colonnes :
  - $i < j, \quad a_{ij} = 0 \rightarrow$ /
  - $i \geq j$ utilisé pour calculer x_i
    - $i = j \rightarrow a_{ii}$ dénominateur de l'expression
    - $i > j \rightarrow \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} . x_j$
    - $b_i - \sum$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \right), \; i = 2, \ldots, n.$$

Résolution de système triangulaire supérieure

Soit le système suivant à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & & b_1 \\ 0 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n-1}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & & b_2 \\ 0 & + & 0 & + & \dots & + & a_{3n-1}x_{n-1} & + & a_{3n}x_n & & b_3 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1n}x_n & & b_{n-1} \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & a_{nn}x_n & & b_n \end{array}\right.$$

Exemple: un système à 4 inconnus

$$\left\{\begin{array}{cccccccll} 3x_1 & + & 5x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -4 \\ & & & & 2x_3 & + & 0x_4 & = & 8 \\ & & & & & & 3x_4 & = & -3 \end{array}\right.$$

Résolution de système triangulaire supérieure
Exemple

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 = 10 \\ \quad\; - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -4 \\ \qquad\qquad 2x_3 + 0x_4 = 8 \\ \qquad\qquad\qquad 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_4 = \frac{-3}{3} = -1 \\ x_3 = \frac{1}{2}\left(8 - 0(-1)\right) = 4 \\ x_2 = \frac{1}{-4}\left(-4 - \left(2 \times 4 - 3(-1)\right)\right) = \frac{15}{4} \\ x_1 = \frac{1}{3}\left(10 - \left(5x_2 - 6x_3 + x_4\right)\right) = \frac{65}{12} \end{cases}$$

Résolution de système triangulaire supérieure

$$\begin{cases} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & = & b_2 \\ a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & = & b_3 \\ a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & = & b_4 \end{cases}$$

via matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{34}x_4\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4)\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)\right)$$

Résolution de système triangulaire supérieure

Méthode de remontée

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

- Calculer xn
- Calculer les x_i $(i = (n-1): -1: 1)$
  - Parcours des colonnes j:
  - $i > j, \quad a_{ij} = 0 \rightarrow$ /
  - $i \leq j$ utilisé pour calculer x_i
    - $i = j \rightarrow a_{ii}$ dénominateur de l'expression
    - $i < j \rightarrow \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} . x_j$
    - $b_i - \sum$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right), \; i = n-1, \ldots, 1,$$