Centre Universitaire Abdelhafid Bousouf Mila 2024/2025

Institut des sciences et de technologie **Probabilité**

$3^{\text{ième}}$ année Informatique (LMD)

Série N 1

Rappels : Analyse combinatoire

Soit E un ensemble à n éléments.

p-listes : On appelle p-liste de E, toute suite ordonnée (l'ordre est important) de p éléments pris parmi n élément de E.

• n^p : nombre de p-listes de E.

Arrangements : On appelle arrangement de p éléments, toute suite ordonnée (l'ordre est important) de p éléments distincts pris parmi n éléments de E.

• $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$: nombre d'arrangements de p éléments parmi n éléments de E.

Permutations : Si $p = n$, les arrangements de n éléments parmi n éléments seront appelées permutations de n éléments.

$P_n = A_n^p = n!$: nombre de permutations de n éléements.

Combinaisons : Une combinaison est un sous ensemble à p éléments de n éléments de E. Ici, l'ordre n'a pas d'importance et la répétition des éléments est interdite.

• $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$: nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments de E.

Exercice 1 :

Combien existe-t-il de plaques minéralogiques à 9 caractères (les 4 premiers étant des lettres et les 5 autres des chiffres) ? Même question si l'on impose que les répétitions de lettres ou de chiffres sont exclues.

Exercice 2 :

On veut former un comité de 7 personnes, constitué de 2 démocrates, 2 républicains, et 3 indépendants. On a le choix parmi 6 démocrates, 5 républicains, et 4 indépendants. Combien de choix sont possibles ?

Exercice 3 :

Soit E un ensemble à n éléments.

(1) Quelle est le nombre de parties de E à p éléments ? $(1 \leq p \leq n)$.

(2) En déduire le cardinal de $P(E)$.

(3) Soit $a \in E$. Dèterminer le nombre de sous-ensembles de E de cardinal p :

-qui contiennent a ;

-qui ne contiennent pas a.

En dèduire que : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

Exercice 4 :

Une urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 noires. On en tire 4 boules.

a) Quel est le nombre de tirages possibles.

b) De combien de façons peut-on tirer :

4 boules blanches.

2 boules blanches et 2 noires.

Exercice 5 :

Montrer que

(1)$\Sigma_{i=1}^{n} C_n^i = 2^n$

(2)$\Sigma_{i=1}^{n} (-1)^i C_n^i = 0$

Exercice 6 :

Soient A, B des événements. Montrer que

$P(A) = P(A \bigcap B) + P(A \bigcap B^c)$.

$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$.

Exercice 7 :

On jette un dé équilibré et une pièce de monnaies au même temps.

(1) Décrire l'ensemble fondamental de cette expérience.

(2) Calculer le cardinal de cet ensemble fondamental.

(3) Exprimer puis calculer la probabilité des événements suivants :

A = "Obtenir Face et nombre paire". B = "Obtenir un nombre premier". C = "Obtenir Pile".

Exercice 8 :

Une urne U contient 6 boules blanches, 4 boules rouges et 5 boules vertes. On considère les trois méthodes suivantes :

Méthode 1 : l'une après l'autre avec remise de la boule tirée.

Méthode 2 : l'une après l'autre sans remise de la boule tirée.

Méthode 3 : simultané.

Calculer avec ces méthodes la probabilité d'obtenir :

1) Trois boules rouges (Tirage de trois boules).

2) Deux boules blanches et deux vertes (Tirage de quatre boules).

Exercice 9 :

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite :

(1) Définir l'espace fondamental de cette expérience aléatoire.

(2) Caluculer à l'aide d'un arbre de probabilité pondéré les probabilités des événements suivants :

A : « Le résultat ne comporte que des Piles » .

B : « Le résultat comporte au moins une Face » .

C : « Le résultat comporte : 2 Pile et 1 Face » .

Exercice 10 :

On lance un dé jusqu'à la première apparition du (6) Six. Notons :

$A_i = \{\text{Le i-ème lancer affiche le chifre } 6\}$,$i \in \mathbb{N}^*$.

(1) Définir avec des expressions chacun des événements suivants :

-$E_1 = \bar{A}_1 \bigcap \bar{A}_2 \bigcap A_3$.

-$E_2 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i$.

(2) Ecrire à l'aide des événements Ai et $\bar{A}_i$ les événements :

- E_1= { La première apparition du 6 a lieu dans le sixième lancer}

- E_2 = {6 n'apparaît pas au cours des 3 premiers lancers}

- E_3 = {On obtient au moins une fois 6 dans les 10 premiers lancers}.

Exercice 11 :

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement deux boules sans remise. Calculer et comparer les probabilités des deux événements suivants :.

A : « Tirer deux boules de même couleur».

B : « Tirer deux boules de couleurs différentes».

Exercice 12 :

Une urne contient 03 boules blanches et 02 boules noires.

I) On tire successivement 03 boules, chaque fois si la boule est blanche on la remet dans l'urne.

(1) Construire un arble de probabilité de cette expérience.

(2) Calculer la probabilité des événement suivants :

A :"Les boules sont de même couleurs", B :"Les boules sont de couleurs différentes.

(3) Supposons que la deuxième et troisième boules tirées sont blanches, calculer la probabilité pour que la première boule tirée soit noire.

..