Cours de probabilités et statistique

Mme Elhadj Ali Thouria

2017-2018

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

ESPACES PROBABILISÉS

1.1 Notions intuitives et langage de la théorie des probabilités

Définition d'une expérience aléatoire

On désigne par une expérience aléatoire, une expérience dont le résultat n'est pas prévisible à priori. Elle est notée ξ.
Exemples :

1. Jet d'une pièce de monnaie.
2. Lancer d'un dé.
3. Constat du sexe d'un nouveau né.

Espace des épreuves (Univers, espace fondamental où espace de probabilité)

L'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire est appelé espace des épreuves. Il est en général noté Ω (grand omega).

Exemple 1. *L'espace fondamental associé à l'expérience du jet d'une pièce de monnaie est :* $\Omega_1 = \{Pile, Face\}$.
L'espace fondamental associé à l'expérience du jet d'un dé est : $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
L'espace fondamental associé à l'expérience de l'observation su sexe d'un nouveau né est $\Omega_3 = \{Fille, Garçon\}$.

Remarque :Ω n'est pas nécessairement fini. Par exemple :

1. Une suite de lancer de dé : $\Omega = \{(a_k)_{k\geq 1} : a_k \in \{1, ..., 6\}, \forall k \geq 1\}$
2. Taille d'une personne : $\Omega = \mathbb{R}^+$.
3. Durée de vie d'une ampoule .
4. Une suite de tirages à pile ou face, se terminant à la première apparition d'un pile :$\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, ...\}$

L'événement

Un événment est réalisé ou non par une épreuve. C'est donc un sous ensemble de l'espace Ω.

Exemple 2. *L'événement E :"le nombre obtenu est pair", relatif à l'expérience du jet d'un dé.*
$E = \{2, 4, 6\} \subset \Omega_2$.

L'événement élémentaire

On appelle les événement de Ω, les événement élémentaites et on les notes par ω (petit omega).

L'événement composé

L'événement composé est un ensemble d'événements élémentaires.

Exemple 3. *1. Si on jet une pièce de monnaie, on obtient deux é'vénements élémentaires : Pile et Face.*

2. *Si on jet un dé, 1,2,3,4,5 et 6 sont des événements élémentaires, par contre l'événement E :"le nombre obtenu est pair", est un événement composé de trois événements élémentaires 2,4 et 6.*

L'événement certain (ou sûr)

On note Ω l'événement certain, il est toujours réalisé.

Exemple 4. *On jet un dé, A="Obtenir un chifre naturel a,* $1 \leq a \leq 6 \Rightarrow A = \Omega$*"*

L'événement impossible

On le note par $\emptyset$, il n'est jamais réalisé.

Exemple 5. *On jet un dé, B :"obtenir un chiffre inférieur à 1"*$\Rightarrow B = \emptyset$.

Définition 1. *L'ensemble des événements est donc l'ensemble des parties de* Ω*, noté* $\mathcal{P}(\Omega)$.

Si $\Omega = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \mathcal{P}(\Omega) = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
Les événements sont reprśentés par des lettres majuscules : A,B,C,... .

1.2 Opérations sur les événements

Soit Ω un espace de probabilité, et soient A et B deux événements de Ω.

L'intersection $A \cap B$

$A \cap B$ est l'événement (A et B) qui est réalisé si *et* seulement si A et B le sont.

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \quad \text{et} \quad \omega \in B\}.$$

La réunion $A \cup B$

$A \cup B$ est l'événement (A ou B) qui est réalisé si et seulement si l'événement A *ou* l'événement B le sont.

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \quad \text{ou} \quad \omega \in B\}.$$

L'événement contraire (ou complémentaire)

$C_{\Omega}^{A} := A^c := \overline{A}$ est l'événement (contraire de A) qui est réalisé ssi l'événement A ne l'est pas.

L'inclusion $A \subset B$

On dit que A est inclus dans B si la réalisation de A implique celle de B.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

.

La différence $A - B$

On appelle différence $A - B$ entre deux ensembles A et B de Ω, l'ensemble d'élément de Ω qui appartiennent à A et n'appartiennent pas à B, i.e :

$$A - B = A \cap B = \{\omega \in \Omega, \omega \in A \quad et \quad \omega \notin B\}$$

Exemple 6. *Revenons à l'exemple du jet du dé, on a :*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

et soit $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$, $C = \{3\}$, *on a :*
$A \cap B = \{6\}$,
$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$,

$A \cap C = \emptyset$,

$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ ($\overline{A}$ *:on obtient un nombre impair),*

$A - B = \{2, 4\}$.

Propriétés :

$$\overline{\overline{A}} = A, \ \ \overline{\emptyset} = \Omega, \ \ \overline{\Omega} = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Lois de Morgan

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.3 Les événements incompatibles

On dit que les événements A et B sont *incompatibles (disjoints)*, s'ils ne peuvent pas être réalisé simultanément. On a alors :

$$A \cap B = \emptyset.$$

Dans l'exemple A et C sont incompatibles.

Il existe un vocabulaire propre aux événements, différent du vocabulaire ensembliste :

Notations	**Vocabulaire ensembliste**	**Vocabulaire prababiliste**
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément deΩ	événement élémentaire
A	un sous ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cap B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cup B$	intersection de A et B	A et B
$\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cup B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

1.4 Calculs des probabilités

Définition d'une probabilité

Soient Ω un ensemble fondamental, $\mathcal{A}$ la famille des événements, et P une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathcal{A}$.
On dit que P est une fonction de probabilité et que $P(A)$ est la probabilité de l'événement A, si l'on a les axiomes suivants :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. Pour chaque événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$,
3. $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \varnothing$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Et pour toute suite $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$, d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (i.e, $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$) on a :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

On appelle espace probabilisé, le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Propriétés des probabilités :

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.

Calculs des probabilités : (Cas d'équiprobabilités)

Probabilité d'événements élémentaires

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ l'ensemble fondamental et $card(\Omega) = n$.
On définit la probabilité P sur tous les événements élémentaires $\omega_i \subset \Omega$, telle que

$P(\omega_i) = p_i, \quad i = 1, ..., n,.$

La probabilité P vérifie les conditions suivantes :

1. $p_i \geq 0, \quad i = 1, ..., n,$
2. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Dans le cas *d'équiprobabilité* (i.e, $\forall i \neq j, p_i = p_j = p$), on a :

$$\forall i : 1 \leq i \leq n : P(\omega_i) = \frac{1}{n}.$$

En effet :

$\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup ... \cup \{\omega_n\},$

Alors,

$P(\Omega) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup ... \cup \{\omega_n\}),$

Et comme ω_i sont des événements élémentaires, donc :

$$\forall i \text{ et } \forall j \quad \omega_i \cap \omega_j = \varnothing,$$

Donc $P(\Omega) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}).. + P(\{\omega_n\}),$

Or, $\forall \omega_i \subset \Omega, \quad P(\{\omega_i\}) = p, i = 1, ..., n$ (équiprobabilités),

on obtient : $1 = p + p + ... + p = np$

Donc : $P\{\omega_i\} = p = \frac{1}{n}$.

Exemple 7. *On jette un dé. On calcule la probabilité d'obtenir numéro 3.*

On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'un événement composé

La probabilité d'un événement composé est égale aux nombre des cas favorables sur le nombre des cas possibles.

Si A est un événement composé de k événements élémentaires, on en déduit

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{\text{nombres des cas favorables}}{\text{nombres des cas possibles}} = \frac{k}{n}.$$

Exemple 8. *On jette un dé. Calculer le probabilité des événement suivants :*

A :"Le résultat du jet est un nombre pair".

B :"Le résultat du jet est inférieur à 3".

C :"Le résultat du jet est inférieur à 7".

D :"Le résultat du jet est supérieur à 6".

Réponse

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad card(\Omega) = 6.$

$A = \{2, 4, 6\}, \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

$B = \{1, 2\}, \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

$C = \Omega, \qquad P(C) = 1.$

$D = \{\emptyset\}, \qquad P(D) = 0.$

1.5 Indépendance et conditionnement

Exemple 9. *Quelle est la probabilité d'avoir un cancer du poumon ?*
Information supplémentaire : vous fumez une vingtaine de cigarettes par jour. Cette information va changer la probabilité.
L'outil qui permet cette mise à jour est la probabilité conditionnelle.

Définition : Étant donnés deux événements A et B, avec $P(A) > 0$, on appelle probabilité de B conditionnellement à A, ou sachant A, la probabilité notée $P(B\backslash A)$ définie par

$$P(B\backslash A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)}$$

On peut écrire aussi $P(B \cap A) = P(B\backslash A)P(A)$.

Utilisation 1 : Quand $P(A)$ et $P(B \cap A)$ sont faciles à calculer, on peut en déduire $P(B\backslash A)$.

Utilisation 2 : Quand $P(B\backslash A)$ et $P(A)$ sont faciles à trouver, on peut obtenir $P(B \cap A)$.

Propriétés :

•$P(\overline{B}\backslash A) = 1 - P(B\backslash A)$

•$P(A \cup B\backslash C) = P(A\backslash C) + P(B\backslash C) - P(A \cap B\backslash C)$.

Exemple 10. *Dans un lycée* 25% *des éléves échouent en mathématiques* 15% *échouent* *en chimie, et* 10% *échouent à la fois en mathématiques et en chimie.*

On choisie un élève au hasard

- *Si l'élève a échoué en chimie, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en mathématiques ?*

Réponse :

Soient les évènements

M : "l'élève a échoué en maths",

C : "l'élève a échoué en chimie",

$P(M) = 0.25, \; P(C) = 0.15, \; P(M \cap C) = 0.1.$

$P(M \backslash C) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0.10}{0.15} = \dfrac{2}{3}.$

Proposition 1.1. *(Formule des probabilités totales) :*

Soit A un évènement tel que $0 < P(A) < 1$. Pour tout évènement B, on a

$$P(B) = P(B \backslash A)P(A) + P(B \backslash A^c)P(A^c)$$

Démonstration. Comme $A \cup A^c = \Omega, P(B) = P(\cap(A \cup A^c)) = P((B \cap A) \cup (B \cap A^c))$. Or $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont incompatibles. On en déduit

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$

La définition de la probabilité conditionnelle permet de conclure. ■

□

Définition 2. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On l'appelle partitions de Ω si elle vérifie les deux conditions :*

(i) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

(ii) les A_i sont deux à deux incompatibles : pour tous $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition 1.2. *(Formule des probabilités totales généralisée)*

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de Ω, telle que $P(A_i) > 0$, pour tout $i \in I$. Alors, pour tout événement B,

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \backslash A_i)P(A_i)$$

Proposition 1.3. *(Formule de Bayes) Soit A et B deux événements tel que $0 < P(A) < 1$ et $P(B) > 0$. Alors,*

$$P(A\backslash B) = \frac{P(B\backslash A)P(A)}{P(B\backslash A)P(A) + P(B\backslash A^c)P(A^c)}$$

Démonstration.

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\backslash A)P(A)}{P(B)}$$

et on conclut en remplaçant $P(B)$ par son expression donnée par la formule des probabilités totales. ■ □

Proposition 1.4. *(Formule de Bayes généralisée)*
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω, telle que $P(A_i) > 0$, pour tout $i \in I$. Soit un événement B, tel que $P(B) > 0$. Alors, pour tout $i \in I$,

$$P(A_i\backslash B) = \frac{P(B\backslash A_i)P(A_i)}{\sum_{j\in I} P(B\backslash A_j)P(A_j)}$$

Exemple 11. *Deux opérateurs de saisie, A et B, entrent respectivement 100 et 200 tableaux sur informatique. Les tableaux de A comportent des fautes dans $5,2\%$ des cas et ceux de B dans $6,7\%$ des cas. On prend un tableau au hasard. Il comporte des fautes. Quelle est la probabilité pour que A se soit occupé de ce tableau ?*
Soient les événements :
$T_A =$ "le tableau est entrée par A",
$T_B = T_A^c$ "le tableau est entrée par B",
$F =$ "le tableau comporte des fautes".
D'après le théorème de Bayes,

$$\begin{aligned} P(T_A\backslash F) &= \frac{P(F\backslash T_A)P(T_A)}{P(F\backslash T_A)P(T_A) + P(F\backslash T_B)P(T_B)} \\ &= \frac{0.052 \cdot \frac{1}{3}}{0.052 \cdot \frac{1}{3} + 0.067 \cdot \frac{2}{3}} = 0.279. \end{aligned}$$

Définition 3. *Deux événements A et B sont dits* ***indépendants*** *si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

S'ils sont de probabilité non nulle, alors

$$P(B \backslash A) = P(B) \Longleftrightarrow P(A \backslash B) = P(B) \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarques 1. *1. A et B sont donc indépendants si la connaissance de la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre.*

2. Deux événements incompatibles A et B, avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, ne sont jamais indépendants. En effet, $A \cap B = \varnothing$ entraîne $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.

3. Si A et B sont indépendants avec$P(A) > 0,\ P(B) > 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ \overline{A} \ \text{ et } \ B \ \text{ sont indépendants,} \\ &\Rightarrow \ A \ \text{ et } \overline{B} \ \text{ sont indépendants,} \\ &\Rightarrow \ \overline{A} \ \text{ et } \ \overline{B} \ \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

Exemple 12. *Dans l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces, les deux èvénements :*
A : "Le resulat est pair", et B "le resultat est un multiple de trois" sont indépendants, En effet :
$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}, \quad A \cap B = \{6\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6},$
$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \dfrac{1}{6}.$

CHAPITRE 2

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

2.1 Variables aléatoires

Au lieu de s'intéresser directement à l'événement aléatoire, on va s'occuper de sa lecture à travers un effet qu'il produit. C'est un peu la même démarche que suit quelqu'un qui se levant le matin et voulant connaitre la température extèrieure, lit son thermomètre plutôt que de sortir.

Définition 4. *: soit Ω un ensemble fondamental muni d'une probabilité P.*
On appelle variable aléatoire réelle X, notée v.a.r, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Une v.a est notée par une letter majuscule : X, Y, Z...

Exemple 13. *Considérons l'éxpérience : On lance trois fois une pièce de monnaie et on s'intéresse au nombre X de fois au PILE apparait.*
À chaque événement élémentaire ω, on associe $X(\omega)$.
$X(\omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

ω	FPF	FFF	PPP	PPF	PFF	PFP	FPP	FFP
$X(\omega)$	1	0	3	2	1	2	2	1

Exemple 14. *Considérons l'éxpérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés équilibrés. Et on s'intéresse à la somme des deux résultats.*
$\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(1,6)\}$

$$\begin{array}{rcl} Y:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longrightarrow & Y(a,b)=a+b \end{array}$$

$Y(\Omega) = \{2,3,...,12\}$

.Si X prend ses valeurs sur un intervalle de $\mathbb{R}$ on dit quelle est continue, par contre si elle ne prend qu'un ensemble fini ou dénombrable (on bijection avec $\mathbb{N}$) de valeurs elle est dite *d*iscrète.

2.2 La loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 5. *La loi de probababilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilité p_i des événements $\{X = x_i\}$, x_i parcourant l'univers image $X(\Omega)$*
La loi de probabilité est donnée par les (x_i, p_i)

Remarque 1. *Pour s'implifier l'écriture, on note : $P(X = x_i) = p_i$.*
Remarquons que d'après la définition d'une probabilité, un système $\{p_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ représente une loi de probabilité ssi

1. $\forall i \geq 1, p_i \geq 0,$
2. $\sum_{i\geq 1} p_i = 1$

Revenons à l'exemples 13, On a

$X = x_i$ (valeurs de X)	0	1	2	3
événement, $X = x_i$	FFF	(PFF)(FPF) (FFP)	(PPF)(PFP)(FPP)	PPP
Probabilité p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

On peut vérifier que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) &= 1 \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 1\end{aligned}$$

Réprésentation graphique

Dans le cas d'une v.a discrète on utilise un *diagramme en bâtons* pour visualiser la distribution de probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

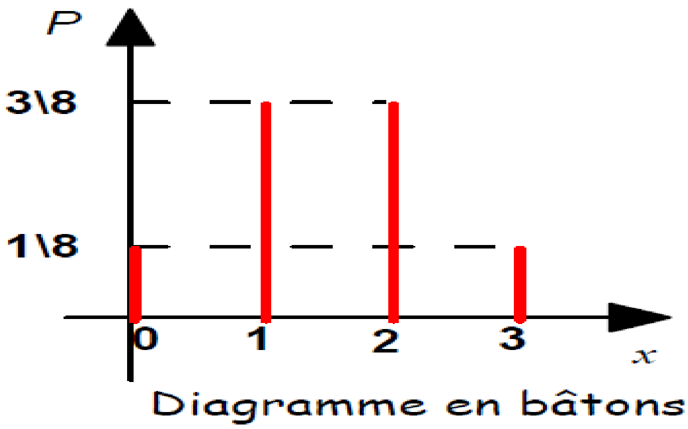

FIGURE 2.1 – Représentation graphique de la lois de probabilité d'une v.a discrète

2.3 La fonction de répartition

Une manière équivalente de donner la loi de X est de déterminer sa fonction de répartition définie par :

Définition 6. *On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X, la fonction F, telle que :*

$$\begin{aligned} F:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} p_i \end{aligned}$$

• Cette fonction correspond à la notion de la fréquence cumulée, puisque $F(x)$ cumule toutes les probababilités des valeurs inférieures ou égales à x. C'est une fonction en escalier. (elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans $\mathbb{R}$).

• Calculons la fonction de répartition de l'exemple précédent.

$$\begin{aligned} x < 0 &\Rightarrow F(x) = 0 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{8} \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4}{8} \\ 2 \leq x < 3 &\Rightarrow F(x) = P(X = 0) = +P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{7}{8} \\ x \geq 3 &\Rightarrow F(x) = 1. \end{aligned}$$

Elle est représentée par une fonction un escalier.

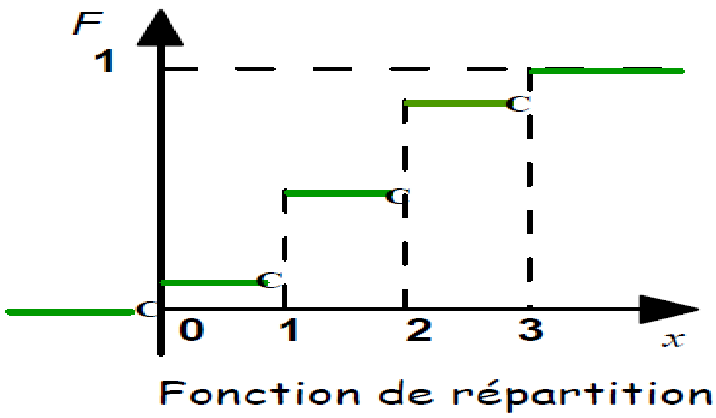

FIGURE 2.2 – Représentation graphique de la fonction de répartition d'une v.a discrètee

Proriétés de la fonction de répartition

Soit F la fonction de répartition d'une v.a discrète x alors :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$
5. Si $a \leq b, \quad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

2.4 Espérance mathématique (la moyenne) et la variance

Si X est une variable aléatoire discrète de loi de probabilité (x_i, p_i) définit sur un nombre fini (n) d'événements élémentaires.
On appelle espérance de X, le réel défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Remarque 2.

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) \\ &\vdots \\ E(x^k) &= \sum_{i=1}^{k} x_i^k P(X = x_i) \end{aligned}$$

La variance

Si X est une variable aléatoire d'espérance $E(X)$. On appelle variance de X le réel : $Var(X) = E(X - E((X))^2$ et on a :

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$Var(X) \geq 0$ (la variance est toujours positive).

L'écrat-type

L'écrat -type de X est le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{var(X)}.$$

Dans l'exemple précedent, caluler $E(X), \sigma(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) = ...$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i^2 = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) + 3^2 \cdot P(X=3) = ...$$

CHAPITRE 3

VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

3.1 Variable aléatoire continue :

On utilise des v.a discrètes pour compter des événements qui se produisent de manière aléatoire, et des v.a continues quand on veut mesurer des grandeurs "continues" (masse, distanse, pression,...).

Définition 7. *Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donnée (borné ou non borné)*

$$X : \Omega \longrightarrow X(\Omega)$$

avec $X(\Omega) =]a, b[\subset \mathbb{R}$

Exemple 15. *Les variables aléatoires :*
** le taux de glucose dans le sang,*
** la taille d'un étudiant,*
** le temps d'attente à une caisse sont des v.a continues.*

3.2 Loi d'une variable aléatoire continue

Si X est une v.a continue, alors la loi de X est définit par une fonction f, appellée *densité de probabilité*, qui vérifie :

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0$

ii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

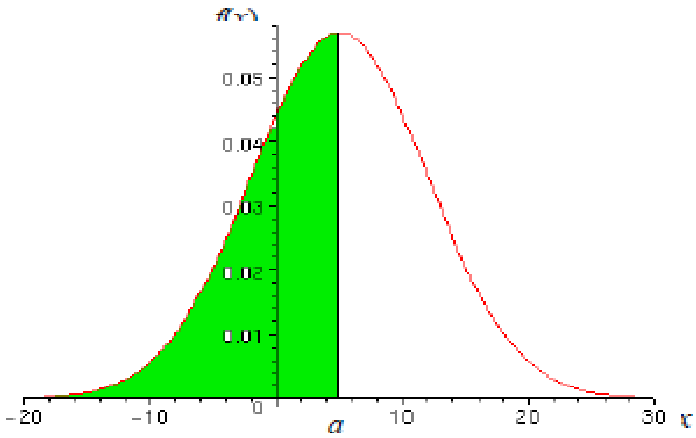

FIGURE 3.1 – Représentation graphique de la fonction densité

3.3 La fonction de répartition

Pour X v.a continue, la fonction de répartition est définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{aligned}$$

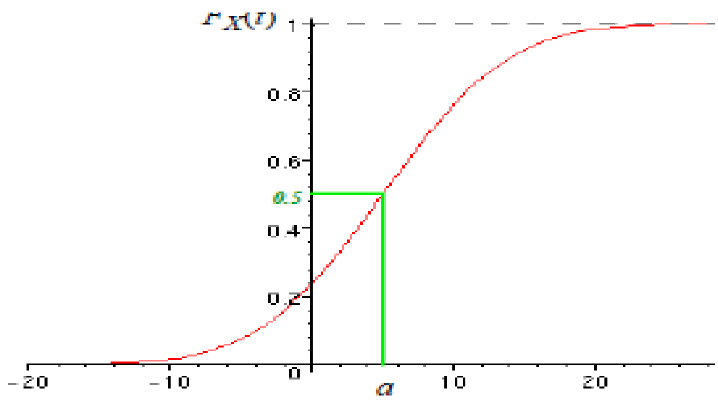

FIGURE 3.2 – Représentation graphique de la fonction de répartition d'une v.a continue

Remarques

• Attention ! pour une v.a continue, $f(x)$ ne réprésente pas la probabilité de l'événement $\{X = x\} = 0$, car $P\{X = x\} = 0$.

• La fonction de répartition $F(x)$ est la primitive de la fonction densité de probabilité $f(x)$.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \qquad (f \text{ est continue et dérivable})$$

Propriétés :

Soit X une v.a continue de densité f et de fonction de répartition F,

- $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ avec $a < b$.
- $P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = F(a) - F(a) = 0$.

Rerésentation graphique

Exemple 16. *Soit f une densité de probabilité d'une v.a X :*

$$f(x) = \begin{cases} k(9 - x^2) & si \quad x \in [0, 3] \\ 0 & si \quad x \notin [0, 3] \end{cases}$$

1. *Calculer k.*
2. *Determiner la fonction de répartition F.*

3. Calculer $P(X > 2)$.

La solution :

1.$f(x) \geq 0.\ \forall x \in D_f$ *et* $\int_{Df} f(x)dx = 1, \quad D_f = \mathbb{R}.$

$$f(x) = \begin{cases} k(9 - x^2) & si \quad x \in [0,3] \\ 0 & si \quad x \notin [0,3] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \quad &\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = 1 \\ \int_{0}^{3} f(x)dx \quad &= \quad \int_{0}^{3} k(9 - x^2)dx = 9kx\Big|_0^3 - k\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 1 \\ &\Rightarrow \quad 9 \cdot 3k - k9 = 1 \Rightarrow 18k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(9 - x^2) & si \quad x \in [0,3] \\ 0 & si \quad x \notin [0,3] \end{cases}$$

Le déssin

2. **La fonction de répartition :**

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x \quad &\longrightarrow \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \end{aligned}$$

Alors :

si $\quad x < 0 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

si $\quad 0 \leq x < 3 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt$

$= \int_0^x \frac{1}{18}(9 - t^2)dt = \frac{1}{18}(9t - \frac{t^3}{3})\Big|_0^x = \frac{1}{18}(9x - \frac{x^3}{3})$

si $\quad x \geq 3 \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^3 f(t)dt + \int_3^x f(t)dt$

$= \frac{1}{18}(9t - \frac{t^3}{3})\Big|_0^3 = \frac{1}{18}(9 \times 3 - 9) = 1.$

Donc

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \\ \frac{1}{18}(9x - \frac{x^3}{3}), & si \quad 0 \leq x \leq 3, \\ 1 & si \quad x > 1. \end{cases}$$

3.a

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= \int_2^{+\infty} f(t)dt \\ &= \int_2^3 f(t)dt + \int_3^{+\infty} f(t)dt \\ &= \int_2^3 \frac{1}{18}(9 - t^2)dt = \frac{1}{18}(9t - \frac{t^3}{3})\Big|_2^3 \\ &= \frac{1}{18}(27 - \frac{27}{3}) - \frac{1}{18}(18 - \frac{8}{3}) \\ &= \frac{1}{18}\left[(27 - 9) - (\frac{54 - 8}{3})\right] \\ &= \frac{1}{18}(18 - \frac{46}{3}) \\ &= 0.15. \end{aligned}$$

3.b On peut calculer $P(X > 2)$ en utilisant la fonction de répartition.

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - F(2) \\ &= 1 - (\frac{1}{18}(9 \times 2 - \frac{2^3}{3})) \\ &= 0.15. \end{aligned}$$

3.4 L'espérance et la variance

Si X est une v.a continue,on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\ &\vdots \\ E(X^n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx. \end{aligned}$$

La Variance :

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 f(x)dx \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - (\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx)^2 \\ \sigma(X) &= \sqrt{var(X)} \end{aligned}$$

Exemple 17. *Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ de l'exemple précédent*

On a :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin [0,3] \\ \frac{1}{18}(9 - x^2) & si \quad x \in [0,3]. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{3} xf(x)dx + \int_{3}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \frac{1}{18}\int_0^3 x(9 - x^2)dx = \frac{1}{18}[\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}]\Big|_0^3 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^3 x^2 f(x)dx = \frac{1}{18}[\frac{9}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}]\Big|_0^3 = \frac{9}{8}.$

Propriétés

Soit X une v.a réelle et soit, $a, b \in \mathbb{R}$

1. $E(aX+b) = aE(X)+b$
2. Si $X = c$ (c est une constante), $E(X) = E(c) = c$
3. Si $X = c$ (c est une constante), $Var(X) = Var(c) = 0$
4. $Var(aX+b) = a^2Var(X)$
5. $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

Le passage du cas discret au cas continu se fait en remplaçant p_i par $f(x)dx$ et $\sum$ par $\int$,c'est ce qui est illustré ci dessous et qui permet de déduire facilement le cas continu du cas discret.

Cas discret	**Cas continu**
La loi de probabilité est donnée par : $\{p_i\}$ou par	La loi de probabilité est donnée par : $f(x)$ ou par :
$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} p_i$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
La moyenne est donnée par : $E(X) = \sum_{i\geq 1} x_i p_i$	La moyenne est donnée par : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
La variance est donnée par : $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ $= \sum_{i\geq 1} x_i^2 p_i - (\sum_{i\geq 1} x_i p_i)^2$	La variance est donnée par : $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx)^2$