المصفوفات Matrices ٢٠١٣.١٢.٣٠

المصفوفة Matrix: عبارة عن مجموعة من الاعداد الحقيقية أو المعقدة أو منهما معاً مرتبة على شكل صفوف واعمدة بشكل مستطيل .

المصفوفة التي تملك m من الصفوف و n من الاعمدة تدعى مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وتكتب بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فمثلاً المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ \sqrt{3} & 2+i & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة من الدرجة 2×3 .

اذا كانت $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ \ln 4 & 2 & e^3 \end{bmatrix}$ فان

$$a_{11} = 1 \,, a_{12} = -3 \,, a_{13} = \sqrt{2} \,, a_{21} = \ln 4 \ \,, a_{22} = 2 \,, a_{23} = e^3$$

جمع وطرح المصفوفات : لجمع أو طرح مصفوفتين أو أكثر فاننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة وفي هذه الحالة يجب ان تكون المصفوفات من الدرجة ذاتها فمثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-5) & -2+1 \\ 0+(-3) & 1+4 \\ 4+(-6) & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-(-2) \\ 2-1 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفة بثابت : اذا ضُربت مصفوفة بثابت معين c فان جميع عناصرها تُضرب بهذا الثابت فمثلاً

$$2\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times(-2) \\ 2\times 0 & 2\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفتين : يمكن ضرب مصفوفتين اذا كان عدد الاعمدة في الاولى يساوي عدد الصفوف في الثانية فاذا كانت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ والمصفوفة B من الدرجة $n \times r$ فان المصفوفة $C = A.B$ تكون من الدرجة $m \times r$ ويمكن التعبير عن حاصل ضرب المصفوفتين A و B كما يلي :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

حيث c_{ij} عنصر في المصفوفة C و $i = 1,2,3,\cdots,m \ \ and \ \ j = 1,2,3,\cdots,r$

ان عملية ضرب مصفوفتين ليست ابدالية اي انه ليس من الضروري ان يكون $A.B = B.A$

مثال (١) جد $B.A$ و $A.B$ (ان أمكن) اذا كان $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & -\sqrt{2} & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & \sqrt{2}\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & -\sqrt{2} & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & \sqrt{2}\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times 3+0\times(-2)+1\times 4 & 2\times(-1)+0\times\sqrt{2}+1\times(-3)\\ -4\times 3+\left(-\sqrt{2}\right)\times(-2)+5\times 4 & -4\times(-1)+\left(-\sqrt{2}\right)\times\sqrt{2}+5\times(-3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & -5\\ 8+2\sqrt{2} & -13\end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & \sqrt{2}\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & -\sqrt{2} & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times 2+(-1)\times(-4) & 3\times 0+(-1)\times\left(-\sqrt{2}\right) & 3\times 1+(-1)\times 5\\ (-2)\times 2+\sqrt{2}\times(-4) & (-2)\times 0+\sqrt{2}\times\left(-\sqrt{2}\right) & (-2)\times 1+\sqrt{2}\times 5\\ 4\times 2+(-3)\times(-4) & 4\times 0+(-3)\times\left(-\sqrt{2}\right) & 4\times 1+(-3)\times 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & \sqrt{2} & -2\\ -4-4\sqrt{2} & -2 & -2+5\sqrt{2}\\ 20 & 3\sqrt{2} & -11\end{bmatrix}$$

مبدلة المصفوفة Transpse of a Matrix:

اذا كانت لدينا المصفوفة A من الدرجة $m\times n$ فان مبدلة A تكون من الدرجة $n\times m$ ويرمز لها بالرمز A^T ويمكن الحصول عليها بابدال الصفوف بالاعمدة فمثلاً اذا كانت لدينا

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 6 & 3 & -9\end{bmatrix} \text{ فان } A^T=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\\ -3 & -9\end{bmatrix}$$

<u>مصفوفات خاصة Special Matrices</u>

المصفوفة المربعة Square Matrix:

وهي مصفوفة من الدرجة $m\times m$ اي تتساوى فيها عددالصفوف مع الاعمدة كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 9 & -2 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

المصفوفة القطرية Diagonal Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة التا فهة Null Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ونكتب $A = 0$

* اذا كان $A.B = 0$ فليس من الضروري ان تكون احدى المصفوفتين صفراً فمثلاً اذا كانت

$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$ فان $A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+4-6 & 18-6-12 \\ 6+12-18 & 54-18-36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الوحدة Unit Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي فانها تساوي 1 ونرمز لها بالرمز I

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* ان حاصل ضرب مصفوفة الوحدة باي مصفوفة اخرى من نفس الدرجة يساوي المصفوفة نفسها اي $A.I = I.A = A$

المحددة للمصفوفة المربعة Determinant of Square Matrix :

اذا كانت A مصفوفة مربعة فانها تمتلك محددة ونرمز لها بالرمز $det(A)$ أو $|A|$ وتحسب كما يلي

* اذا كانت A من الدرجة 2×2 و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فان $det(A) = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$

** اذا كانت A من الدرجة 3×3 و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ فان

$$det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \times a_{33} - a_{32} \times a_{23}) - a_{12}(a_{21} \times a_{33} - a_{31} \times a_{23})$$
$$+ a_{13}(a_{21} \times a_{32} - a_{31} \times a_{22})$$

ويمكن حسابها بطريقة أُخرى وكما يلي :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

ملاحظة : $det(A) = det(A^T)$

مثال (٢) اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ فجد $det(A)$ ، $det(B)$

الحل :

$$det(A) = 12 - 2 = 10$$

$$det(B) = 5(42 - 12) - 2(0 - 24) + 1(0 - 48) = 150$$

المرافق Cofactor

لتكن A مصفوفة مربعة فان لكل عنصر من عناصرها مرافق A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, det(M_{ij})$$

حيث $det(M_{ij})$ هي المحددة الناتجة من المصفوفة A وذلك بحذف الصف i والعمود j

فمثلاً في المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، العامل المرافق للعنصر 2 هو

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\, det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-9) = 9$$

منقول المصفوفة Adjoint of Matrix

ان منقول المصفوفة المربعة A هي المبدلة لمصفوفة مرافقات A ويرمز لها بالرمز $adj(A)$

مثال (٣) جد $adj(A)$ ، $adj(B)$ للمصفوفتين في المثال (٢)

الحل

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(4) = 4 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}(3) = 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 30 \quad B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 24 \quad B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -48$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -10 \quad B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 27 \quad B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -4$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \quad B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 30$$

$$C = \begin{bmatrix} 30 & 24 & -48 \\ 10 & 27 & -4 \\ 0 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

$$adj(B) = C^T = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 24 & 27 & -15 \\ -48 & -4 & 30 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة Inverse of Matrix

لتكن A مصفوفة مربعة بحيث ان $det(A) \neq 0$ فان معكوس A يُرمز له بالرمز A^{-1} يُحسب من القاعدة التالية :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

مثال (٤) جد B^{-1} , A^{-1} للمصفوفتين في المثال (٢)

الحل :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} adj(B) = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 24 & 27 & -15 \\ -48 & -4 & 30 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

لاحظ في المثال السابق

$$A.A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 12-2 & -3+3 \\ 8-8 & -2+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويترك تحقيق $B.B^{-1} = B^{-1}.B = I$ كتمرين للطالب .

حل مجموعة المعادلات الخطية Solution 0f a set of linear equations

ليكن لدينا نظام المعادلات التالي

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

يمكن تمثيله باستعمال المصفوفات كما يلي

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ونكتب $A.X = B$ حيث $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ولحل هذا النظام نضرب طرفي المعادلة بـ A^{-1}

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \quad \rightarrow \quad I.X = A^{-1}.B \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}.B$$

مثال (٥) جد مجموعة حل النظام

$$x - y + 2z = 1$$
$$2x + y + z = -1$$
$$x + 2y - 3z = 8$$

الحل : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1}.B$$

الآن يجب ان نجد A^{-1}

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$C = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 7 + 6 = -6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/2 \\ -7/6 & 5/6 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}.B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/2 \\ -7/6 & 5/6 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/6 + 1/6 + 4 \\ -7/6 - 5/6 - 4 \\ -1/2 - 1/2 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$x = 5 \quad , \quad y = -6 \quad , \quad z = -5$

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية **Eigenvalues and Eigenvectors**

لتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان المتجه الغير صفري X يُسمى متجهاً ذاتياً للمصفوفة A اذا كان AX مضاعفاً عددياً للمتجه X أي ان $AX = \lambda X$ حيث ان λ ثابت يُسمى القيمة الذاتية للمصفوفة A .

لايجاد القيم الذاتية للمصفوفة A نضع المعادلة $AX = \lambda X$ بالصورة $(\lambda I - A)X = 0$ والتي لها حل غير صفري اذا وفقط اذا كان $det(\lambda I - A) = 0$.

مثال (٦) جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

الحل :

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(\lambda - 3) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

القيم الذاتية هي $\lambda = 2 \ and \ \lambda = 1$

$$(\lambda I - A)X = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

عندما $\lambda = 2$ فان

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2y$$

لذا فان المتجه الذاتي هو

$$X = \begin{bmatrix} -2m \\ m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

عندما $\lambda = 1$ فان

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x - 2y = 0 \rightarrow x = -y$$

لذا فان المتجه الذاتي هو

$$X=\begin{bmatrix}-m\\ m\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

حيث $m\in\mathcal{R}$

مثال (٧) جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&4&-1\\-1&2&0\end{bmatrix}$

الحل :
$$\lambda I-A=\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&4&-1\\-1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-2&0&-1\\1&\lambda-4&1\\1&-2&\lambda\end{bmatrix}$$

$$det(\lambda I-A)=0\quad\rightarrow\quad(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-4&1\\-2&\lambda\end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix}1&1\\1&\lambda\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1&\lambda-4\\1&-2\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-2)\{\lambda(\lambda-4)+2\}-\{-2-(\lambda-4)\}=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2)+(\lambda-2)=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2+1)=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

القيم الذاتية هي $\lambda=2\quad,\qquad\lambda=1\qquad and\quad\lambda=3$

عندما $\lambda=2$ فان $\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&-2&1\\1&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$z=0\quad,\qquad x-2y+z=0\quad and\quad x-2y+2z=0\;\rightarrow\;x=2y$$

لذا فان المتجه الذاتي هو $X=\begin{bmatrix}2m\\m\\0\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

عندما $\lambda=1$ فان $\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&-3&1\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$-x-z=0\quad,\qquad x-3y+z=0\quad and\quad x-2y+z=0\;\rightarrow\;x=-z\;,y=0$$

لذا فان المتجه الذاتي هو $X=\begin{bmatrix}-m\\0\\m\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

عندما $\lambda=3$ فان $\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&-1&1\\1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$x-z=0\quad,\qquad x-y+z=0\quad and\quad x-2y+3z=0\;\rightarrow\;x=z\quad,\qquad y=2z$$

لذا فان المتجه الذاتي هو $X = \begin{bmatrix} m \\ 2m \\ m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

تمارين

١. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ فجد $A - B \quad , \quad A + B$

٢. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ فجد $3A \quad , \quad A.B \quad , \quad B.A$

٣. اذا كانت $A = [\sqrt{2} \quad 0 \quad 3]$, $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ فجد $\sqrt{2}B \quad , \quad A.B \quad , \quad B.A$

٤. جد معكوس المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

٥. جد مجموعة الحل لانظمة المعادلات التالية :

$(a) \;\; x + 2y + z = 4 \quad , \quad 3x - 4y - 2z = 2 \quad , \quad 5x + 3y - 5z = -1$

$(b) \;\; 2x - y + 3z = 2 \quad , \quad x + 3y - z = 11 \quad , \quad 2x - 2y + 5z = 3$

٦. جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات

$(a) \;\; A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$(b) \;\; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$(c) \;\; C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$