CHAPITRE 2: INTEGRALES IMPROPRES

Intégrale impropre de seconde espèce :

Si $f(x)$ n'est pas bornée seulement à l'extrémité $x = a$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$. Alors, on pose:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si la limite existe.

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est divergente si la limite n'existe pas.

Si $f(x)$ n'est pas bornée seulement à l'extrémité $x = b$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$. Alors, on pose:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si la limite existe.

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est divergente si la limite n'existe pas.

Si $f(x)$ est non bornée seulement en un point intérieur $x = x_0$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$. Alors, on pose:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx$$

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si la limite existe.

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ est divergente si la limite n'existe pas.

Valeur Principal de Cauchy:

Il peut arriver que les limites n'existent pas quand $\varepsilon_1\ et\ \varepsilon_2$ tendent vers zéro indépendamment. En ce cas, il est possible que pose $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Si cette limite existe on appelle cette valeur de limite : la valeur principale de Cauchy.

Intégrale impropre de seconde espèce de fonctions particulières :

- $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} dx$ converge si $p < 1$, et diverge si $p \geq 1$.
- $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} dx$ converge si $p < 1$, et diverge si $p \geq 1$.

Remarque : dans le cas où $p \leq 0$ les intégrales sont propres.

Critères de convergence pour les intégrales impropres de seconde espèce :

- Critère de comparaison pour les intégrales avec intégrande non négatif :
  a) Convergence : soit $g(x) \geq 0$ pour tout $a < x \leq b$, et supposons que $\int_a^b g(x)\, dx$ converge. Alors, si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $a < x \leq b$, donc $\int_a^b f(x)\, dx$ est converge.
  b) divergence : soit $g(x) \geq 0$ pour tout $a < x \leq b$, et supposons que $\int_a^b g(x)\, dx$ diverge. Alors, si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $a < x \leq b$, alors $\int_a^b f(x)\, dx$ est diverge.
- Critère du quotient pour les intégrales avec intégrande non négatif :
  a) Si $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$, pour tout $a < x \leq b$, si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ ou ∞, alors $\int_a^b f(x)\, dx$ et $\int_a^b g(x)\, dx$ convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.
  b) Si $A = 0$ dans (a) et si $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.
  c) Si $A = \infty$ dans (a) et si $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.

Ce critère est relie au critère de comparaison dont il est une forme alternative très utile.

En particulier, en prenant $g(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$, nous avons, à partir du comportement connu cette intégrale :

Théorème 2 : soit $\lim_{x \to +\infty} (x-a)^p f(x) = A$, alors :

- $\int_a^b f(x)\, dx$ converge si $p < 1$ et si A est fini.
- $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge si $p \geq 1$ et si $A \neq 0$ (A peut-être infini).

Théorème 3 : soit $\lim_{x \to +\infty} (b-x)^p f(x) = B$, alors :

- $\int_a^b f(x)\, dx$ converge si $p < 1$ et si B est fini.

- $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge si $p \geq 1$ et si $B \neq 0$ (A peut-être infini).

➢ Convergence absolue et semi-convergente : $\int_a^b f(x)\,dx$ est dite absolument convergente si : $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge mais que : $\int_a^b |f(x)|\,dx$ diverge, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est dite semi-convergente.