المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف – ميلة
معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

محاضرات في مادة الاحصاء 3

موجهة لطلبة السنة الثانية علوم التسيير

السنة الجامعية 2023–2024

المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

تمهيد:

رغم الطابع العشوائي للظواهر العشوائية (غير المستقرة)، فإنه على العموم وفي غالب الأحيان لها سلوك معين نجهله، وعلى هذا الأساس حاول علماء الاحصاء والرياضيات تتبع سلوك الظواهر العشوائية في كثير من ميادين المعرفة واستطاعوا وضع قوانين احتمالية لها تفسر سلوك هذه الظواهر بطريقة علمية، فكلما كانت مجموعة من الظواهر العشوائية تستجيب لجملة من القواعد المشتركة (التكرار أي التحقق، المتوسط، الانتشار، شكل التوزيع وغيرها) كلما كان لها نفس القانون الاحتمالي.

يمكن أن نميز بين نوعين من القوانين الاحتمالية:

- قوانين احتمالية لمتغيرات عشوائية متصلة.
- قوانين احتمالية لمتغيرات عشوائية منفصلة.

المحاضرة الأولى: توزيع برنولي وتوزيع ذي الحدين

1. توزيع برنولي

1.1. التعريف بتوزيع برنولي:

سمي هذا التوزيع باسم مكتشفه جيمس برنولي، ويعد توزيع برنولي أو ما يسمى أحيانا بمحاولة برنولي الأساس لبناء العديد من التوزيعات الأخرى، وتعرف تجربة برنولي التي تعد من أبسط أنواع التجارب العشوائية بأنها: التجربة التي تكون نتيجتها إما نجاحا أو فشلا، وتسمى مثل هذه التجارب بمحاولة برنولي، ومن أمثلة هذه التجارب:

- الوحدة المنتجة سليمة أو معيبة.
- نتيجة رمي قطعة نقدية صورة أو كتابة.
- نتيجة المشاركة في مسابقة نجاح أو رسوب.
- الرمي على هدف وإصابته وعدم إصابته.

ملاحظة:

التسمية نجاح أو فشل تستخدم فقط لتعريف نتائج محاولة برنولي وليس للدلالة على تفضيل نتيجة على أخرى؛ أي أنه إذا كانت النتيجة نجاحا فهذا لا يعني بالضرورة أنها النتيجة المرغوب فيها.

ويعتبر النموذج الاحتمالي الذي يحتوي فراغه على حدثين بسيطين فقط من أبسط النماذج الاحتمالية، وبما أن الحدثين البسيطين النجاح p أو الفشل q لهما طبيعة وصفية؛ أي أنهما من البيانات الوصفية، فإننا نحتاج عند إجراء عملية التحليل الإحصائي إلى تحويل البيانات الوصفية إلى كمية، ويستخدم عادة الرقم 1 للإشارة إلى النجاح والرقم 0 للإشارة إلى الفشل، وذلك بالاحتمالات التالية:

$$p(X = 1) = p$$
$$p(X = 0) = q$$

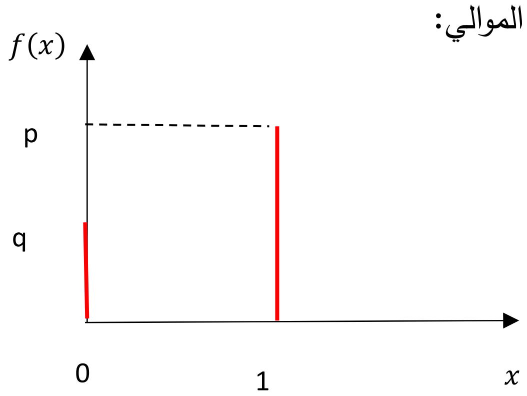
x_i	$p(X = x_i)$
1	p
0	q
$\sum$	$p + q = 1$

ويعرف قانون التوزيع الاحتمالي لبرنولي كما يلي:

$$p(X = x) = p^x q^{1-x} \qquad x = 0,1$$

2.1. التمثيل البياني لقانون توزيع برنولي

بما أن توزيع برنولي من التوزيعات المتقطعة فإن التمثيل البياني لهذا القانون سيتم بواسطة الأعمدة، والمتغير له قيمتين فقط لذلك يمثل بعمودين طول كل منهما يتوقف على القيمة الاحتمالية لحادث النجاح (وبالتالي الفشل)، وهذا ما يبينه الشكل الموالي:

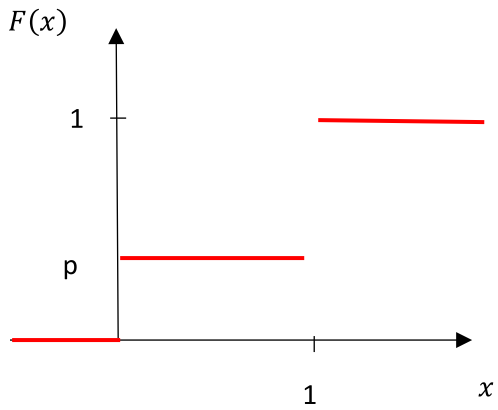


3.1. تابع التوزيع وشكله البياني

يعرف تابع التوزيع كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

ويمثل هذا التابع بثلاث درجات وفق العلاقات الثلاثة العاكسة لتابع التوزيع، وهذا ما يعكسه الشكل الموالي:



4.1. القيم العددية المميزة لتوزيع برنولي

مثل أي متغير عشوائي فإنه متغير برنولي له مميزاته العددية التي نوضحها من خلال الآتي:

1.4.1. التوقع الرياضي

يعرف التوقع الرياضي لتوزيع برنولي كما يلي:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{1} x_i p_i = \sum_{i=0}^{1} x_i p^x q^{1-x} = p$$

$$E(X) = p$$

2.4.1. التباين:

يعرف التباين لتوزيع برنولي كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{1} x_i^2 p_i = \sum_{i=0}^{1} x_i^2 p^x q^{1-x} = p$$

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$V(X) = pq$$

3.4.1. الدالة المولدة للعزوم

$$M_x(T) = E(e^{xt}) = \sum_{i=0}^{1} e^{xt} p_i = \sum_{i=0}^{1} e^{xt} p^x q^{1-x} = \sum_{i=0}^{1} (pe^t)^x q^{1-x}$$

$$M_x(T) = q + pe^t$$

مثال:

عند رمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة في تجربة عشوائية، وكان المتغير العشوائي لا يمثل ظهور الصورة F.

المطلوب:

- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X مع رسم الدالة.
- حساب المميزات العددية للتوزيع.

الحل:

- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

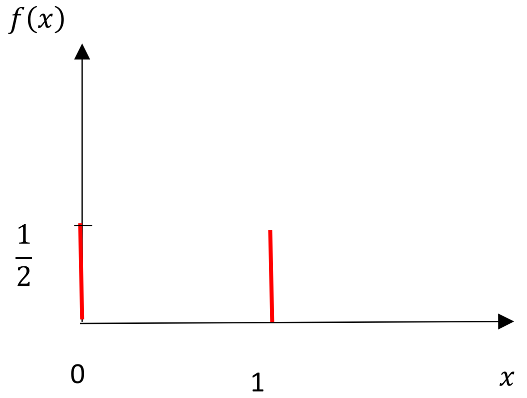
$$p(X = x) = p^x q^{1-x} \qquad x = 0,1$$

$$p(F) = \frac{1}{2}$$

$$q(F) = \frac{1}{2}$$

$$p(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \qquad x = 0,1$$

- رسم دالة التوزيع الاحتمالي:



- حساب المميزات العددية:

$$E(X) = p = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = pq = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{pq} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة:

إن توزيع برنولي هو أبسط قانون احتمالي، وهو من الناحية العملية يطبق في دراسة إحصائية تتم على عينة عشوائية حجمها n=1، لذلك لهذا القانون أهمية نظرية كبيرة لأن كل القوانين الأخرى تبنى عليه بينما ليس له أي قيمة تطبيقية لأن العينة التي حجمها n=1 غير ممثلة للمجتمع الاحصائي.

2. التوزيع الثنائي (توزيع ذو الحدين):

يعتبر التوزيع الثنائي من أبسط وأقدم وأسهل القوانين الاحتمالية، وقد شكل نقطة الانطلاق لدراسة قوانين احتمالية أخرى مثل قانون بواسون، قانون فوق الهندسي وغيرها.

وتتمثل خصائص هذا التوزيع فيما يلي:

- لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط هما النجاح أو الفشل.
- إن نتيجة كل محاولة تعد مستقلة عن نتيجة المحاولات الأخرى في التجربة.
- أن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات، وكذا الأمر بالنسبة لاحتمال الفشل.
- تتضمن تجربة التوزيع الثنائي عددا من المحاولات وليكن (n)، وهو حجم العينة.

لتجربة ذي الحدين استخدامات كثيرة منها:

- طبيعة الانتاج معيب أو جيد.
- إصابة هدف معين أو عدم إصابته.
- نتيجة مباراة نهائية في كرة السلة (خسارة أو فوز).
- نتيجة امتحان نهائي (رسوب أو نجاح).

وبالتالي فالمتغير الثنائي هو تكرار لمحاولة برنولي عددا من المرات، وفي كل محاولة مكررة فإن احتمال النجاح p يبقى ثابتا.

إن عدد مرات النجاح x في تجربة ثنائية مكونة من n محاولة مكررة يدعى بمتغير عشوائي ثنائي، ويسمى توزيع الاحتمال للمتغير الثنائي بالتوزيع الاحتمالي الثنائي ويرمز له:

$$X \backsim B(n,p)$$

n و p: هما معلمتا هذا التوزيع، وهذا يعني أن هذا التوزيع يتحدد تحديدا تاما بمعلومية معلمتيه n (حجم العينة) واحتمال النجاح p.

1.2. القانون الاحتمالي للتوزيع الثنائي:

يعرف القانون الاحتمالي للتوزيع الثنائي كما يلي:

$$p(X=x)=\begin{cases} c_n^x p^x q^{n-x} & x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

ويمكن أن نلاحظ أن شروط دالة الكثافة الاحتمالية محققة:

$$\forall x \ \ f(x) \geq 0$$

$$\sum_{x=0}^{n} p(X = x) = \sum_{x=0}^{n} c_n^x p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1$$

أما التمثيل البياني لقانون التوزيع الثنائي فيتم بالاعتماد على الأعمدة، وبما أنه للتوزيع الثنائي معلمتين n و p فإن شكل منحنى هذا التوزيع يتحدد بناء عليهما تحديدا كاملا، ونميز بين الحالات التالية:

- إذا كانت $p = q = \frac{1}{2}$ فإن منحنى التوزيع يكون متماثلا مهما كانت قيمة n.
- إذا كانت $p \neq q$ فإن منحنى التوزيع يكون ملتويا، وتزداد درجة الإلتواء كلما ابتعدت قيمة p عن $\frac{1}{2}$، فإذا انخفضت قيمة p عن $\frac{1}{2}$ يصبح التوزيع ملتويا إلتواء موجبا، وإذا زادت قيمة p عن $\frac{1}{2}$ يصبح التوزيع ملتويا إلتواء سالبا.

2.2. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية لهذا التوزيع من خلال مايلي:

1.2.2. التوقع الرياضي:

يمكن التعبير عن التوقع الرياضي لمتغير ذو الحدين العشوائي X بدلالة التوقع الرياضي لمتغير بيرنولي، فبما أن عدد مرات تحقق النجاح $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ وهي متغيرات عشوائية برنولية مستقلة فإن التوقع الرياضي يعرف كما يلي:

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$= p + p + \cdots + p$$
$$= np$$
$$E(X) = np$$

2.2.2. التباين:

بما أن هذا التوزيع ليس سوى عبارة عن تكرار لمحاولات برنولي، وبما أن التباين مجموع متغيرات عشوائية مستقلة يساوي مجموع تباين هذه المتغيرات، فإن التباين يعرف كما يلي:

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$
$$= pq + pq + \cdots + pq$$
$$= npq$$
$$V(X) = npq$$

3.2.2. الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع كما يلي:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_x(T) &= (e^{xt}) \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{xt} c_n^x\, p^x q^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} c_n^x\, (e^t p)^x q^{n-x} \\
&= (pe^t + q)^n
\end{aligned}
$$

$$M_x(T) = (pe^t + q)^n$$

مثال:

باعت إحدى وكالات شركة قطع الغيار في يوم واحد ست بطاريات من نفس النوع والمواصفات، فإذا علمت أن هذا النموذج من البطاريات حسب المنتج أنه يبقى صالحا للاستعمال بعد إنقضاء سنتين من بدأ الاستعمال باحتمال قدره 0.25.

المطلوب:

- حساب احتمال أن تكون نصف البطاريات التي بيعت صالحة بعد انقضاء سنتين من بدأ إستعمالها على الأقل.
- حساب التوقع الرياضي والتباين.

الحل:

ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد البطاريات الصالحة بعد انقضاء سنتين من بدأ إستعمالها.

$$X \backsim B(n,p)$$

$$p(X=x) = \begin{cases} c_6^x p^6 q^{6-x} & x = 0,1,2,\dots,6 \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$n = 6$$

$$p = 0.25$$

- حساب احتمال أن تكون نصف البطاريات التي بيعت صالحة بعد انقضاء سنتين من بدأ إستعمالها على الأقل:

$$p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - [p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)]$$

$$p(X \geq 3) = 0.1694$$

- حساب التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = np = 6 \times 0.25 = 1.5$$

$$V(X) = npq = 6 \times 0.25 \times 0.75$$