المحاضرة الثالثة: التوزيع الهندسي

تمهيد:

تعد تجارب التوزيع الهندسي مشابهة إلى حد كبير لتجارب توزيع برنولي التي تفترض بأن نتيجة كل تجربة هي إما نجاح المحاولة باحتمال (p) أو فشلها باحتمال $(1-p)$، وعدد محاولات في تجارب التوزيع الهندسي لا تكون محددة من البداية كما هو الحال في تجارب توزيع ذي الحدين، وعلى هذا الأساس فإن المتغير العشوائي المنفصل X في حالة تجارب التوزيع الهندسي هو عبارة عن عدد مرات إجراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح، وبذلك فإن أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة x تسبقه عدد من المحاولات الفاشلة وقدرها $x-1$.

بافتراض أنه لدينا المتغير X يمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح، ففي هذه الحالة يتوزع المتغير وفق التوزيع الهندسي، والشروط الواجب توفرها في التجربة حتى تعتبر عشوائية هندسية هي:

- اشتمال التجربة على محاولات متكررة ومستقلة.
- لكل محاولة نتيجتين ممكنتين فقط.
- ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
- التوقف عند أول نجاح.

أمثلة عن التجربة الهندسية:

المثال الأول: سحب كمال 3 كرات على التوالي دون إرجاع من صندوق فيه أربع كرات حمراء وخمس كرات خضراء، ثم قام بكتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

هذه التجربة ليست بتجربة هندسية لأن احتمال النجاح غير ثابت من محاولة لأخرى، كما أن المحاولات غير مستقلة فكل تجربة تؤثر على التجربة التي قبلها.

المثال الثاني: إلقاء قطعة نقود منتظمة بشكل متكرر والتوقف عند ظهور الصورة.

هذه التجربة هي تجربة هندسية لتوفر الشروط التالية:

- محولات متكررة ومستقلة.
- للتجربة نتيجتين هما النجاح أو الفشل.
- احتمال النجاح (ظهور الصورة) ثابت من محاولة لأخرى.
- التوقف عند أول نجاح.

1. دالة الكثافة الاحتمالية:

تعرف دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهندسي وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$p(X=x)=\begin{cases} pq^{x-1} & x=\mathbf{1},2,3,\dots,n \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

X : عدد المحاولات وصولا إلى أول نجاح.

p: احتمال النجاح.

ويمكن التأكد من أن دالة الاحتمالية للتوزيع الهندسي هي دالة كثافة احتمالية كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$\forall\, x \;/\; x \in \aleph \quad : \quad f(x) \geq 0$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n} p(X=x) &= p + pq^1 + pq^2 + \cdots + pq^n \\ &= p(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n) \\ &= p\left(\frac{1}{1-q}\right) = 1\end{aligned}$$

2. المميزات العددية:

يمكن توضيح المميزات العددية للتوزيع الهندسي من خلال مايلي:

1.2. الدالة المولدة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع كما يلي:

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_x(T) &= (e^{xt}) \\ &= \sum_{x=1}^{n} e^{xt} p(X=x) \\ &= \sum_{x=1}^{n} e^{xt} pq^{x-1} \\ &= \mathrm{p}\sum_{x=1}^{n} e^{xt}\frac{q^x}{q} \\ &= \frac{\mathrm{p}}{q}\sum_{x=1}^{n} (e^t q)^x \\ &= \frac{\mathrm{p}}{q}[(e^t q)^1 + (e^t q)^2 + \cdots + (e^t q)^n]\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathrm{p}}{q}\left[\frac{qe^{t}}{1-qe^{t}}\right]$$

$$\mathrm{M}_{x}(T) = \frac{\mathrm{p}}{1-qe^{t}}$$

2.2. التوقع الرياضي:

يمكن ايجاد التوقع الرياضي بالاعتماد على الدالة المولدة للعزوم كما هو مبين من خلال ما يلي:

$$E(X) = \frac{dM_{x}(T)}{dt}|t=0$$

$$= \frac{d\left(\frac{p}{1-qe^{t}}\right)}{dt}|t=0$$

$$= \frac{pe^{t}(1-qe^{t})-qe^{t}(-pe^{t})}{(1-qe^{t})^{2}}|t=0$$

$$= \frac{pe^{t}-pqe^{2t}+pqe^{2t}}{(1-qe^{t})^{2}}|t=0$$

$$= \frac{pe^{t}}{(1-qe^{t})^{2}}|t=0$$

$$= \frac{p}{(1-q)^{2}}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

3.2. التباين:

يعرف التباين وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$V(X) = E(X^{2})-[E(X)]^{2}$$

$$E(X^{2}) = \frac{d^{2}M_{x}(T)}{dt^{2}}|t=0$$

$$= \frac{d\left[\frac{pe^{t}}{(1-qe^{t})^{2}}\right]}{dt}|t=0$$

$$= \frac{pe^{t}(1-qe^{t})^{2}-[pe^{t}(2)(1-qe^{t})^{2-1}(-qe^{t})]}{(1-qe^{t})^{4}}|t=0$$

$$= \frac{(1-qe^{t})[pe^{t}(1-qe^{t})-pe^{t}(2)(-qe^{t})]}{(1-qe^{t})^{4}}\ |t=0$$

$$= \frac{(1-qe^{t})[pe^{t}-qpe^{2t}+2pqe^{2t}]}{(1-qe^{t})^{4}}\ |t=0$$

$$E(X^2) = \frac{pe^t + qpe^{2t}}{(1-qe^t)^3} \ |t=0$$
$$= \frac{p+qp}{(1-q)^3}$$
$$= \frac{p(1+q)}{p^3}$$
$$V(X) = \frac{p(1+q)}{p^3} - \frac{1}{p^2}$$
$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

مثال:

رميت زهرة النرد متجانسة في تجربة عشوائية حتى يتم الحصول على أحد الأوجه الستة.

- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ما هو احتمال الحاجة إلى 4 محاولات على الأقل للحصول على العدد 5 على وجه زهرة النرد؟
- كم هو معدل عدد المحاولات التي تحتاجها؟

الحل:

يعرف المتغير العشوائي X بأنه عدد المحاولات حتى الحصول على العدد 5 على وجه زهرة النرد لأول مرة.

- كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

$$p(X=x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} & x = 1,2,3,\dots,n \\ 0 & \text{ما عدا ذلك} \end{cases}$$

- احتمال الحاجة إلى 4 محاولات على الأقل للحصول على العدد 5 على وجه زهرة النرد:

$$p(X \geq 4) = 1 - p(X < 4)$$
$$= 1 - [p(X=1) + \ p(X=2) + p(X=3)] = 0.579$$

- معدل عدد المحاولات:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$