الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Democratic and Popular Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientfiic Research
et de la Recherche Scientfiique

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوصوف ميلة
Abdelhafid Boussouf University Center, Mila

معهد العلوم والتقنية

Institute of Science and Technology

نشرة دروس العلوم و التقنية
مقياس

فيزياء الاهتزازات والموجات الميكانيكية

من إعداد :

◄ الأستاذ بن لطرش محمد الصالح

◄

◄

السنة الجامعية: 2025-2024

المحتويات

مقدمة

هذه الدروس مخصصة لطلبة السنة الثانية في تخصص هندسة الطرائق. يهدف هذا المقياس إلى توضيح ظاهرة الاهتزازات الميكانيكية ذات التذبذبات الصغيرة في الأنظمة ذات درجة أو درجتين من الحرية، بالإضافة إلى دراسة انتشار الموجات الميكانيكية.

المعرفة المسبقة المطلوبة: مفاهيم الرياضيات والفيزياء من السنة الأولى.

هيكل الكتاب: الكتاب مقسم إلى قسمين رئيسيين:

القسم الأول: الاهتزازات الميكانيكية

1. الفصل الأول: مقدمة في معادلات لاجرانج
2. الفصل الثاني: التذبذبات الحرة للأنظمة ذات درجة حرية واحدة
3. الفصل الثالث: التذبذبات القسرية للأنظمة ذات درجة حرية واحدة
4. الفصل الرابع: التذبذبات الحرة للأنظمة ذات درجتين من الحرية
5. الفصل الخامس: التذبذبات القسرية للأنظمة ذات درجتين من الحرية

القسم الثاني: الموجات

1. الفصل الأول: ظاهرة الانتشار أحادية البعد
2. الفصل الثاني: الأوتار المهتزة
3. الفصل الثالث: الموجات الصوتية في السوائل
4. الفصل الرابع: الموجات الكهرومغناطيسية

باب 1

الاهتزازات - عموميات :مقدمة إلى معادلات لاغرانج -

1.0.1 عموميات :مقدمة إلى معادلات لاغرانج

تعريف الحركة الدورية

نقول عن لحركة أنها دورية إذا تكررت بنفس الطريقة خلال فترات زمنية متساوية. نقدم فيما يلي بعض المفاهيم الأساسية حول الحركات الاهتزازية و الذبذبات و نقدم الوصف الرياضي لها

تعريف 1

الذبذبة هي أي حركة متكررة حول نقطة التوازن، تحدث في أنظمة مختلفة مثل الأنظمة الميكانيكية (مثل البندول)، أو الكهربائية (مثل التيار المتردد)، أو البيولوجية (مثل ضربات القلب). وعادةً ما يصف الحركة السلسة الدورية، على الرغم من أنه يمكن أن يحدث أيضًا في سياقات غير فيزيائية مثل موجات الضوء، التي تتذبذب دون اهتزاز ميكانيكي. وتشمل الأمثلة البندولات والإشارات الكهربائية والدورات الموسمية. يمكن أن تحدث التذبذبات في الأنظمة الفيزيائية أو الكيميائية أو الكهربائية أو البيولوجية.

تقسم إلى تذبذبات:

1. التذبذبات الحرة: تحدث عندما يتذبذب الجسم دون تدخل خارجي أو احتكاك.
2. التذبذبات المخمدة: يتأثر الجسم بقوى احتكاك تبدد الطاقة، ما يؤدي إلى توقف التذبذب تدريجيًا.
3. التذبذبات القسرية: تحدث عندما ينقل فعل خارجي طاقة إلى المذبذب.

4. التذبذبات القسرية المخمدة: القوة الخارجية الدورية تعوض فقدان الطاقة بسبب الاحتكاك، مما يحافظ على التذبذبات.

تعريف 2

تعريف الاهتزاز: التعريف: يشير الاهتزاز على وجه التحديد إلى التذبذبات الميكانيكية السريعة لمادة أو جسم. وهو يتضمن حركة الجسيمات أو الهياكل ذهابًا وإيابًا، غالبًا استجابة لقوة خارجية.

نوع الحركة: يرتبط الاهتزاز عمومًا بالحركات السريعة ذات السعة الصغيرة حول موضع التوازن، وغالبًا ما ينتج صوتًا أو حرارة مع تبدد الطاقة.

الأمثلة:

1. اهتزاز وتر الجيتار عند نتفها.
2. اهتزاز الهاتف المحمول أثناء إشعار.
3. الحركة الاهتزازية لمحرك أو آلة.
4. الطبيعة الميكانيكية: يتضمن الاهتزاز عادةً **أنظمة ميكانيكية ويرتبط عادةً بالأشياء المادية.

الاختلافات الرئيسية بين الاهتزازات و الذبذبات :

1. النطاق:
- التذبذب هو مصطلح أكثر عمومية ويمكن تطبيقه على أي حركة متكررة (ميكانيكية، كهربائية، بيولوجية، إلخ).
- يشير الاهتزاز على وجه التحديد إلى التذبذبات الميكانيكية لهيكل أو جسم.

2. السرعة والسعة:
- غالبًا ما يكون الاهتزاز أسرع وينطوي على حركات أصغر، في حين يمكن أن يكون التذبذب أبطأ ويغطي نطاقًا أكبر من الحركة.

3. الأنظمة:
- ينطبق التذبذب على أنظمة متنوعة مثل الدوائر الكهربائية والأشياء الميكانيكية.
- يقتصر الاهتزاز عادةً على الأنظمة الميكانيكية أو الفيزيائية.
- التذبذب هو مفهوم عام للحركة الدورية، ينطبق على أنظمة مختلفة.
- الاهتزاز هو نوع محدد من التذبذب يشير إلى الحركة الميكانيكية للأشياء.

الشكل الرياضي: - **غالبًا ما يتم وصف الحركة الدورية رياضيًا من خلال وظائف الجيب أو جيب التمام، والتي تعكس الطبيعة المتكررة للحركة. بالنسبة للحركات السريعة نستخدم التردد (f) المعبر عنه بالهرتز (HZ) ويرتبط بالدور بواسطة:**

$$f = \frac{1}{T} \tag{1}$$

يسمى عدد الدورات في الثانية بالنبضات ω (يُشار إليها، وتُقاس بالراديان/ثانية)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

1Hz = دورة في الثانية

10 = 1KHz ^{3}Hz

$1MHz = 10^6 Hz$

$1GHz = 10^9 Hz$

ملاحظة 1

1-يُقال إن المذبذب متناغم إذا تطور النظام وفقًا لقانون دوري للشكل الجيبي (الشكل 1-1).

2- يقال أن المذبذب غير متناغم إذا تطور النظام وفقًا لقانون دوري لأي شكل غير جيبي الشكل 1-2.

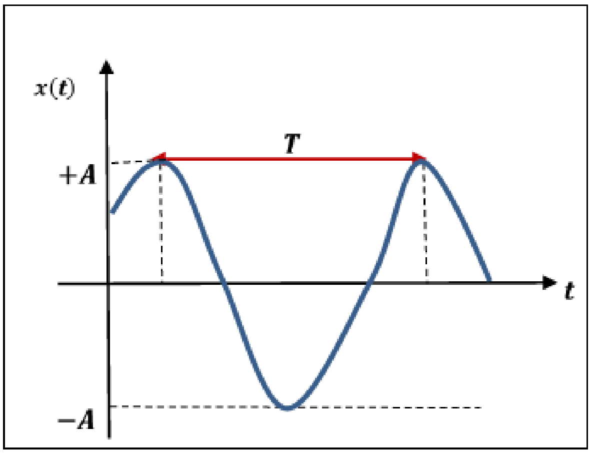
$$x(t) = A\cos(t+\varphi) \tag{3}$$

A : سعة التذبذب (القيمة القصوى للإزاحة)

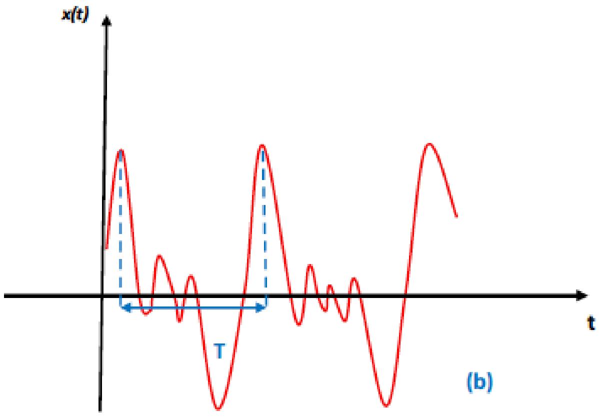
ω : نبض التذبذب

φ : الطور الأولي (t = 0)

السرعة: v سرعة النقطة المتذبذبة M هي المشتقة لإزاحتها.



شكل 1.1: الشكل الجيبي للموجة المتناغم



شكل 2.1: الشكل الغير متناغم

2.0.1 مفهوم الطاقة

يتضمن مفهوم الطاقة في الاهتزاز والتذبذب التبادل المستمر بين شكلين أساسيين للطاقة الميكانيكية: الطاقة الحركية (KE) والطاقة الكامنة (PE). في الأنظمة التي تتعرض للاهتزاز أو التذبذب، تتحرك الطاقة ذهابًا وإيابًا بين هذين الشكلين أثناء تحرك الجسم أو النظام خلال دورته.

إجمالي الطاقة الميكانيكية:

تظل الطاقة الميكانيكية الكلية في نظام مهتز أو متذبذب ثابتة (بافتراض عدم وجود فقدان للطاقة بسبب الاحتكاك أو التخميد). هذه الطاقة هي مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة في أي نقطة معينة من الحركة.

$$E_{Tot} = KE + PE = Const \tag{4}$$

طاقة الحركة :(KE)

طاقة الحركة هي طاقة الحركة. وهي تصل إلى أقصى حد لها عندما يتحرك الجسم بأسرع ما يمكن، وهو ما يحدث عادةً عندما يمر الجسم عبر موضع توازنه (مركز حركته). صيغة طاقة الحركة:

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5}$$

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} \tag{6}$$

$$\Rightarrow KE = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{7}$$

في حالة الدوران تكون المعادلة :

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \tag{8}$$

مع J هو عطالة عزم الدوران
و في حالة الانسحاب x و θالدوران :

$$T_{Tot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \tag{9}$$

حيث m هي كتلة الجسم و v هي سرعته. - في النظام المتذبذب، تكون الطاقة الحركية في أعلى مستوياتها عندما تكون السرعة أعظمية وتساوي صفراً عند نقاط تحول الحركة.

عزم القصور الذاتي للدوران

الشكل	عزم القصور الذاتي بالنسبة لمركز الثقل
قضيب (طول L، كتلة M)	$\frac{1}{12}ML^2$
أسطوانة (نصف القطر R، الكتلة M)	$\frac{1}{2}MR^2$
كرة (نصف القطر R، الكتلة M)	$\frac{2}{5}MR^2$
كتلة نقطية m	0

جدول 1.1: عزم القصور الذاتي بالنسبة لمركز الثقل

في حالة نقطة الدوران في غير مركز الثقل فإننا نطبق نظرية (هوجنز-شتاينر)

نظرية 2

يعطى عزم القصور الذاتي لكتلة M ذات شكل عشوائي حول نقطة A مختلفة عن مركز الثقل G بالعلاقة التالية :

$$J_{/A} = J_{/G} + M(AG)^2$$

(نظرية هوجنز-شتاينر)

الطاقة الكامنة (PE)

- الطاقة الكامنة هي الطاقة المخزنة بسبب موضع الجسم أو تكوينه. في الأنظمة المهتزة، يمكن أن تكون هذه الطاقة طاقة وضع مرنة (في الينابيع) أو طاقة وضع الجاذبية (في البندولات). - في النظام المتذبذب، تبلغ طاقة الكامنة أقصاها عندما يكون الجسم عند أقصى نقاط حركته (نقاط الدوران) وتساوي صفرًا عند موضع الاتزان. - معادلة طاقة الكامنة في نظام الكتلة- النابض:

$$PE = \frac{1}{2}kx^2 \tag{10}$$

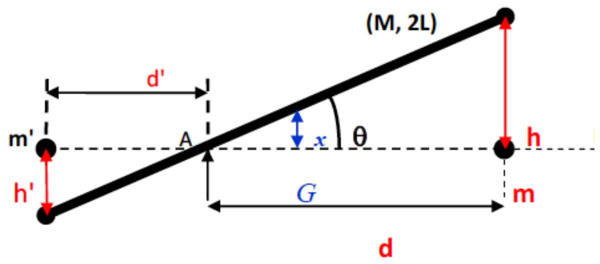
حيث k هو ثابت النابض، و x هو الإزاحة من موضع الاتزان.

- التخميد وفقدان الطاقة: - في الأنظمة الحقيقية، يمكن أن يتسبب التخميد (بسبب الاحتكاك أو مقاومة الهواء) في فقدان الطاقة في شكل حرارة، مما يؤدي إلى انخفاض تدريجي في سعة الاهتزاز. - في النظام المخمّد، تنخفض الطاقة الميكانيكية الكلية بمرور الوقت، مما يؤدي في النهاية إلى توقف الحركة.

مثال 1

- المذبذب التوافقي البسيط: في نظام الكتلة- النابض: تتحرك الكتلة ذهابًا وإيابًا، محولة طاقة الوضع المخزنة في النابض إلى طاقة حركية والعكس صحيح.
- النواس: في النواس، تتبادل طاقة وضع الجاذبية والطاقة الحركية أثناء تأرجح البندول من جانب

h!



شكل 3.1: نواس مركب من قضيب و كتلتين

إلى آخر.
- اهتزاز الوتر: عندما يهتز وتر القيثارة، فإن الشد في الوتر يخزن طاقة الوضع، بينما تترجم حركة الوتر إلى طاقة حركية.

مثال 2

مثال عملي افترض أن لدينا نظامًا ميكانيكيًّا بالأسفل مكوَّنًا من كتلتين نقطيتين (m1 و m2) مثبتتين على الطرفين الحرين لقضيب كتلته **M**وطوله $2L$. هذا النظام حركة دورانية بالنسبة إلى النقطة A أو النقطة الثابتة A. احسب طاقة الحركة وطاقة الوضع للنظام الشكل 1.3

الحل :يتكون النظام من 3 كتل، لذلك هناك 3 طاقات حركية و3 طاقات كامنة 1- الطاقة الحركية *KE*

$$KE_{Tot} = KE_M + KE_m + KE_{m'}$$

$$KE_M = \frac{1}{2} J_{M/A} \theta^2$$

$$J_{M/A} = \frac{1}{12} M(2L^2) + M(AG)^2$$

$$AG = \frac{L}{2}$$

$$J_{M/A} = \frac{1}{12} M(2L^2) + M(\frac{L}{2})^2 = \frac{7}{12} ML^2$$

$$\Rightarrow KE_M = \frac{1}{2}\frac{7}{12} ML^2 \theta^2$$

$$T_m = \frac{1}{2} J_{m/A} \theta^2$$

$$J_{m/A} = [0 + md^2]$$

$$d = L + \frac{L}{2} = \frac{3L}{2}$$

$$J_{m/A} = m\left(\frac{3L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m\right]L^2\theta^2$$

$$T_{m'} = \frac{1}{2}J_{m'/A}\theta^2$$

$$J_{m'/A} = [0 + m'd^2]$$

$$d = \frac{L}{2}$$

$$J_{m'/A} = m'\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow T_{m'} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}m'\right]L^2\theta^2$$

$$T_{Tot} = \frac{1}{2}\frac{7}{12}ML^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m\right]L^2\theta^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{4}{9}m'\right]L^2\theta^2$$

$$\Rightarrow T_{Tot} = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{12}M + \frac{9}{4}m + \frac{1}{4}m'\right]L^2\theta^2$$

2- الطاقة الكامنة PE

$$PE_{Tot} = PE_M + PE_m + PE_{m'}$$

$$PE_M = Mgx$$

$$x = \frac{1}{2}L\sin\theta$$

$$PE_M = \frac{1}{2}MgL\sin\theta$$

$$PE_m = mghh = d\sin\theta = \frac{3}{2}L\sin\theta$$

$$PE_m = \frac{3}{2}mgL\sin\theta$$

$$PE_{m'} = -m'gh'$$

$$h' = \frac{d}{3}\sin\theta = \frac{1}{2}L\sin\theta$$

$$PE_{m'} = -\frac{1}{2}m'gL\sin\theta$$
$$PE_{Tot} = \frac{1}{2}MgL\sin\theta + \frac{3}{2}mgL\sin\theta - \frac{1}{2}m'gL\sin\theta$$
$$PE_{Tot} = \frac{1}{2}gL\sin\theta(M+3m-m')$$

3.0.1 شروط التوازن

يتم تعيين شروط التوازن إذا كان التوازن

$$F = 0$$

$$x = x_0 \Rightarrow F\,|_{x=x_0}$$

بالنسبة للقوة المشتقة من كمون :

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

يتم كتابة حالة التوازن على النحو التالي:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,|_{x=x_0} = 0 \tag{13}$$

هناك نوعان من التوازن:

i) حالة التوازن المستقرة: بمجرد إزاحة النظام من موضع توازنه، فإنه يعود إليه. وفي هذه الحالة تكون قوة الاستعادة:

$$f = -C_x$$

with
0 ≻ C

$$C = -\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{15}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\,|_{x=x_0} > 0 \tag{16}$$

إن حالة التوازن المستقر هذه هي حالة التذبذب.

حالة التوازن غير المستقرة:

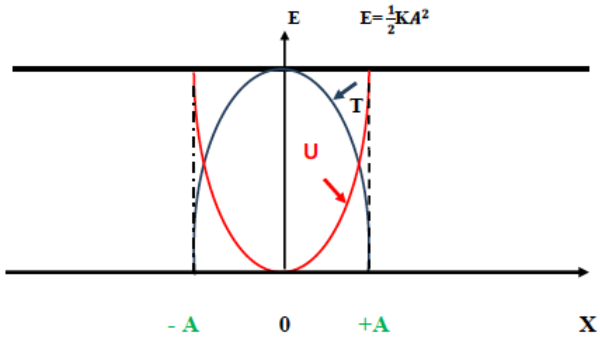
لا يعود النظام إلى حالة التوازن عند إزاحته. في هذه الحالة، تُكتب حالة التوازن غير المستقرة على النحو التالي:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=x_0} < 0 \tag{17}$$

في حالة الدوران نستبدل:

$$x \rightarrow \theta$$

$$x_0 \rightarrow \theta_0$$



شكل 4.1: تغير الطاقة كدالة للإزاحة

من الممكن تمثيل تطور ثلاث طاقات بيانياً: الطاقة الكامنة، والطاقة الحركية، والطاقة الكلية (الميكانيكية)، الشكل 1-4.

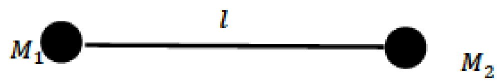
تعريف 3

عندما تنخفض الطاقة الحركية، ترتفع الطاقة الكامنة، والعكس صحيح. وتُعرف هذه الظاهرة بقانون حفظ الطاقة الكلية في النظام.

4.0.1 صياغة لاغرانج

الإحداثيات المعممة

الإحداثيات المعممة هي مجموعة من الإحداثيات الحقيقية المستقلة أو المرتبطة التي تتيح وصف وتكوين جميع عناصر النظام في أي وقت t.



شكل 1.5: مثال

مثال

يمكن تحديد موقع النقطة M في الفضاء بواسطة 3 إحداثيات على طول المحاور (x, y, z)
يمكن تعريف موضع جسم صلب في الفضاء بستة إحداثيات:

1. 03 إحداثيات تتعلق بمركز الثقل

2. 03 إحداثيات تتعلق بزوايا أويلر (θ, ϕ, ψ)

نرمز بـ $q_1(t), q_2(t), q_3(t)....q_N(t)$: الإحداثيات المعممة.
$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3.....\dot{q}_N$: السرعات المعممة.

درجة الحرية

هي عدد الإحداثيات المستقلة اللازمة لتحديد موضع كل عنصر من عناصر النظام أثناء حركته في أي وقت: نكتب:

$$d = N - r \tag{18}$$

حيث:
d : درجة الحرية
N : عدد الإحداثيات المعممة
r : عدد العلاقات بين الإحداثيات المعممة (عدد القيود)
مثال: لنعتبر نظامًا ميكانيكيًا يتكون من نقطتين M_1 و M_2 مرتبطتين بقضيب طوله L. أوجد عدد درجات الحرية.

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow N = 6$$

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = Cst \Rightarrow r = 1$$

إذن:

$$d = N - r = 6 - 1 = 5 \rightarrow d = 5$$

صياغة لاغرانج

تعتمد هذه الصياغة على دالة لاغرانج

$$L = KE - PE$$

مجموعة معادلات الحركة تُكتب كالتالي:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\right\}=0 \tag{19}$$

حيث:

L دالة لاغرانج

KE الطاقة الحركية للنظام

PE الطاقة الكامنة للنظام

q_i الإحداثي المعمم وهو السرعة المعممة للنظام.

لنظام ذو درجة حرية واحدة ($N = 1$ أو $dof = 1$):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=0$$

[1]

[1] لنظام أحادي الأبعاد، تُكتب معادلة لاغرانج كالتالي:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=0$$

لحركة دورانية θ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)=0$$

باب 2

الاهتزازات - النظم الخطية ذات الدرجة الواحدة من الحرية -

1.2 النظم الخطية ذات الدرجة الواحدة من الحرية

1.1.2 المقدمة: دراسة التذبذبات الحرة غير المخمدة

تعريف 1

النظام الذي يتذبذب بدون تأثير أي قوة خارجية يعرف باسم المذبذب الحر. تُعتبر هذه الأنظمة محافظة (conservative)، أي أن الطاقة فيها تُحفظ أثناء الحركة ولا تُفقد بسبب الاحتكاك أو أي قوة مقاومة أخرى.

التمثيل العقدي وتعريف سلسلة فورييه

لتسهيل العمليات الحسابية، نحول الكميات الجيبية إلى شكل أسي باستخدام صيغة أويلر (Euler):

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

وهذه المعادلة تعني أن الدالة الجيبية والجيب التمام يمكن تمثيلهما كجزء من تعبير أسي، حيث تساعد هذه الطريقة في تسهيل الحسابات المتعلقة بالدوال التوافقية في الأنظمة الفيزيائية.

يمكن التعبير عن الكمية الدورية بواسطة مجموع دوال الجيب والجيب التمام، من أجل التعامل معها رياضياً وفيزيائياً. هذا المجموع يسمى **سلسلة فورييه (Fourier series)**، وهي أداة رياضية قوية لتحليل الدوال الدورية.

سلسلة فورييه لدالة دورية $f(t)$ ذات فترة T تُعرّف على النحو التالي:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

- حيث أن a_0، a_n، و b_n هي **معاملات فورييه**.
المعاملات تُحسب كالتالي: - المعامل الثابت a_0:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

- معامل الجيب التمام a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

- معامل الجيب b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

التردد الزاوي ω يُسمى **التردد الأساسي** (fundamental frequency):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

أما الترددات التي تكون مضاعفات للتردد الأساسي $n\omega$، فتسمى **التوافقيات** (harmonics). هذه التوافقيات مهمة لأنها تمثل الترددات الإضافية التي تظهر في التحليل الرياضي للتذبذبات، وتؤدي دورًا مهمًا في دراسة الأنظمة الميكانيكية والكهربائية الدورية.

دراسة النظام الميكانيكي

يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية باستخدام:

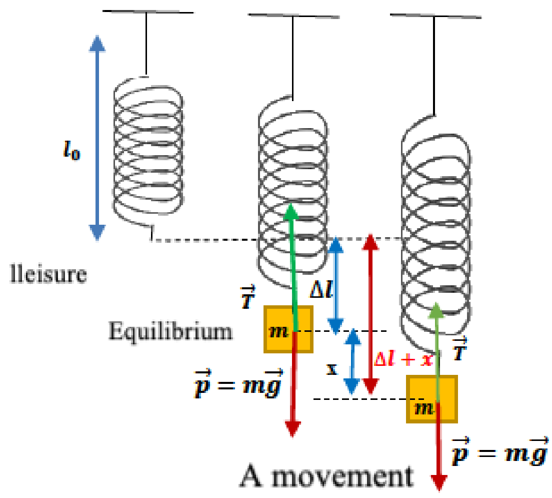
1. قانون نيوتن الثاني
2. قانون حفظ الطاقة
3. طريقة لاغرانج

مثال 1

مثال: كتلة m متصلة بطرف زنبرك تتحرك بدون احتكاك في الاتجاه العمودي.

أ- مبدأ نيوتن الديناميكي المطبق على الكتلة: وفقًا لقانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$



شكل 1.2: نواس بنابض

الإسقاط على المحور x:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

ومن هنا نحصل على المعادلة:

$$m\ddot{x} = mg - T$$

وبإدخال القوة المؤثرة من الزنبرك $T = k(x + \Delta l)$، يصبح:

$$m\ddot{x} = mg - k(x + \Delta l)$$

وبالتبسيط:

$$m\ddot{x} = mg - kx - k\Delta l$$

في حالة التوازن:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

وهذا يعني:

$$mg - k(\Delta l) = 0$$

أي أن:

$$m\ddot{x} = -kx + \underbrace{mg - k\Delta l}_{0}$$

وهذا يؤدي إلى:

$$m\ddot{x} = -kx$$

وبالتالي:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

وأخيرًا:

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$$

هذه هي المعادلة التفاضلية للحركة.

ب- قانون حفظ الطاقة: في النظام الحر، يتم حفظ الطاقة الميكانيكية (أو الكلية)، أي أن:

$$E_{Tot}=T+U=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$$

وبما أن الطاقة محفوظة:

$$\frac{\mathrm{d}E_{Tot}}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow m\ddot{x}\dot{x}+k\dot{x}x=0$$

وهذا يعطينا:

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0\Leftrightarrow \ddot{x}+\omega_0^2 x=0$$

ج- طريقة لاغرانج: تُعرّف دالة لاغرانج للنظام على النحو التالي:

$$L=T-U$$

حيث T هي الطاقة الحركية وU هي الطاقة الكامنة. وبالتالي:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$$

الصيغة العامة للاغرانج:

تعريف 2

الصيغة العامة للاغرانج هي أداة رياضية تستخدم لتحليل الحركة الديناميكية في الأنظمة الفيزيائية، خاصة في الميكانيكا الكلاسيكية. تعتمد على مبدأ الفعل الأدنى، وتربط بين الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للجسم.

تُعطى صيغة لاغرانج بالمعادلة التالية:

$$L=T-U$$

حيث: - L هي دالة لاغرانج. - T هي الطاقة الحركية. - U هي الطاقة الكامنة.

ثم يُستخدم **معادلة لاغرانج** لحساب معادلات الحركة على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

حيث q هي الإحداثيات العامة و $\dot{q}$ هي السرعات العامة.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=0$$

وبإدخال التعبيرات:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}$$

و:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-kx$$

لذا نحصل على:

$$m\ddot{x}+kx=0$$

هذه المعادلة تعبر عن الحركة الديناميكية للنظام الميكانيكي باستخدام طريقة لاغرانج.

حل المعادلة التفاضلية

حل المعادلة:

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\omega_0^2 x=0$$

يكون على الشكل:

$$x(t)=Ae^{rt}$$

حيث r هو عدد حقيقي و A هو ثابت موجب.

$$\dot{x}=Are^{rt} \quad \ddot{x}=Ar^2e^{rt} \Leftrightarrow (r^2-\omega_0^2)Ae^{rt}=0$$

ومنها:

$$\begin{Bmatrix} r_1= & i\omega_0 \\ r_2= & -i\omega_0 \end{Bmatrix}$$

لدينا حلان:

$$x_1(t)=A_1e^{r_1}=A_1e^{i\omega_0 t} \quad /// \quad x_2(t)=A_2e^{r_2}=A_2e^{-i\omega_0 t}$$

$$x(t)=A\left(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right)$$

الحل العام للمعادلة الحركية هو:

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=A\left(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right)$$

وفقًا لعلاقة أويلر:

$$e^{\pm i\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)\pm i\sin(\omega_0 t)$$

إذاً:

$$x(t) = A_1\,(\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)) + A_2\,(\cos(\omega_0 t) - i\sin(\omega_0 t))$$

$$x(t) = (A_1 + A_2)\cos(\omega_0 t) + (A_1 - A_2)\,i\sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t)$$

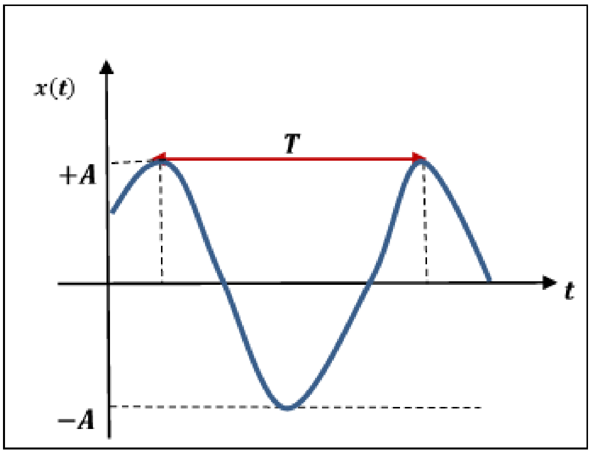
حيث:

$$\begin{cases} B = & \cos\theta \\ C = & \sin\theta \end{cases}$$

لذلك:

$$x(t) = D\cos\theta\cos(\omega_0 t) + D\sin\theta\sin(\omega_0 t) = D\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حيث أن D و φ هما ثابتان يتم تحديدهما من الشروط الابتدائية.



شكل 2.2: الحركة التوافقية الجيبية

التذبذبات تكون جيبية في السعة والفترة الطبيعية:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

إليك الترجمة إلى اللغة العربية:

دراسة النظام الكهربائي

مثال 2

لنأخذ في الاعتبار دائرة كهربائية من نوع **LC**:

$$\sum_i V_i = 0$$

$$V_C + V_L = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

حيث:

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

وبالتالي:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

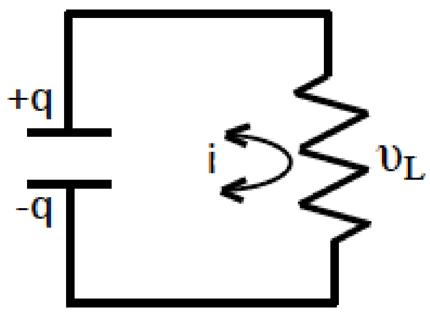
الحل:

$$q(t) = Q\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حيث:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

الجوانب الطاقية



شكل 3.2: دارة مكثفة ووشعة

$$E_m = T + U$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad // \quad \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m(-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi))^2 \\ U = \frac{1}{2}k(A\cos(\omega_0 t + \varphi))^2 \end{cases}$$

من الناحية الطاقية، يقوم هذا المذبذب بتحويل الطاقة المرنة إلى طاقة حركية والعكس صحيح.

$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \Leftrightarrow E_m = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

الطاقة الميكانيكية للمذبذب تتناسب مع مربع السعة (راجع الفصل 1: عرض الطاقة الميكانيكية).

التشابه الكهروميكانيكي

من خلال مقارنة المعادلات التفاضلية للبندول المرن ودائرة "LC" الكهربائية، يمكن إنشاء التشابه الكهروميكانيكي التالي:

النظام الكهربائي	النظام الميكانيكي
$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$	$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$
الشحنة: q	الإزاحة: x
الحث: L	الكتلة: m
مقلوب السعة $\frac{1}{C}$	الزنبرك: k
طاقة الملف: $\frac{1}{2} L \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2$	الطاقة الحركية: $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$
طاقة المكثف: $\frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{C}\right)$	الطاقة الكامنة: $\frac{1}{2} k x^2$

جدول 1.2: التشابه الكهروميكانيكي

باب 3

أنظمة خطية حرة مخمدة ذات درجة واحدة من الحرية

1.3 مقدمة إلى التذبذب الحر المخمد وأنواع الاحتكاك

"يتم نقل جزء من طاقة المذبذب إلى البيئة الخارجية (يتم فقدانها بسبب الاحتكاك أو الإشعاع). تتناقص سعة التذبذبات مع مرور الوقت، ويتوقف المذبذب في النهاية."

2.3 أنواع الاحتكاك

تعتمد معادلات الحركة على طبيعة الاحتكاك. يمكن حل معادلة الحركة فقط مع بعض أنواع الاحتكاك.

1.2.3 الاحتكاك الصلب

تتناسب قوة الاحتكاك ~ مع رد الفعل العمودي للدعم.

$$F_f = -sgn(v)\mu R \tag{1}$$

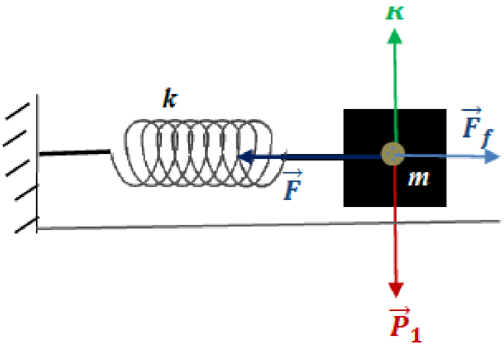
حيث:
F : القوة المستعادة $F = -kx$
μ : معامل الاحتكاك الديناميكي $\neq$ الاحتكاك الساكن.

2.2.3 الاحتكاك السائل أو اللزج

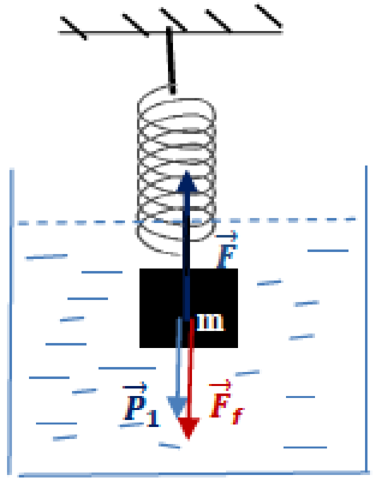
قوة الاحتكاك السائل تتناسب $\neq$ ومعاكسة للسرعة.

$$F_f = -\alpha v \tag{2}$$

حيث $\alpha > 0$



شكل 1.3: الاحتكاك الصلب



شكل 2.3: الاحتكاك السائل أو اللزج

3.2.3 الاحتكاك في الوسائط شديدة اللزوجة

الاحتكاك في الوسائط شديدة اللزوجة يتناسب ≠ مع مربع السرعة. معادلة الحركة غير خطية وعادة لا تحتوي على حل تحليلي.

4.2.3 أنواع أخرى معقدة من الاحتكاك

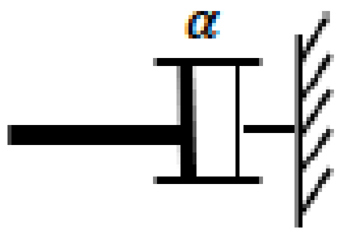
في هذه الدورة، سنقتصر على قوى الاحتكاك اللزج التي تتناسب مع السرعة. يعبر عن قوة الاحتكاك اللزج كما يلي:

$$F_q = -\alpha \dot{q} \qquad (3)$$

حيث: α معامل الاحتكاك اللزج $[N.\frac{s}{m}]$: α q : الإحداثية المعممة للنظام $\dot{q}$: السرعة المعممة للنظام. في حركة أحادية البعد x، يتم التعبير عن القوة كما يلي:

$$\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{u}$$

في الميكانيكا، يمثل المثبط كما هو مبين في الشكل 3.3.



شكل 3.3: تمثيل المثبط

3.3 معادلة لاغرانج في نظام مخمد

"إذا كان هناك احتكاك $f = -\alpha\dot{q}$، فإن معادلة لاغرانج تصبح:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q$$

تحت تأثير قوى الاحتكاك، يفقد النظام الطاقة الميكانيكية في صورة حرارة، لذا توجد علاقة بين القوة F_q ودالة الفقد D من جهة، ومعامل الاحتكاك اللزج من جهة أخرى α.

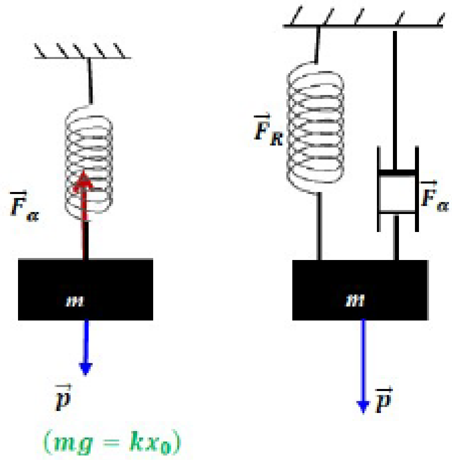
$$F_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \tag{4}$$

حيث:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$$

تصبح معادلة لاغرانج للنظام المخمد كما يلي:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$



شكل 4.3: نظام الكتلة-الزنبرك-المثبط في التوازن والحركة

4.3 معادلة النظام الكتلة-الزنبرك-المثبط

1.4.3 معادلة الحركة

لدراسة حركة مثل هذا النظام، يمكننا استخدام العلاقة الأساسية للديناميكا (FRD) وعلاقات لاغرانج.

أ- العلاقة الأساسية للديناميكا: FRD

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{P} + \vec{F}_R + \vec{F}_\alpha = m\vec{\gamma}$$

إسقاط على ox:

$$mg - k(x + x_0) - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\underbrace{mg - kx_0}_{=0} + kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

هذه معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية متجانسة.

ب- طريقة لاغرانج

الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

الطاقة الكامنة:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

دالة الفقد:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

دالة لاغرانج:

$$L = T - U$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

الأسلوب اللاغرانجي:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) & = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} & = -kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} & = \alpha\ddot{x} \end{cases}$$

من خلال الاستبدال في المعادلة (III.1) سيكون لدينا:

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

هذه هي معادلة الحركة في حالة النظام المخمد الحر.
كما هو الحال في حالة المذبذب التوافقي غير المخمد، فإن التردد الطبيعي للنظام هو $\omega_0 = \frac{k}{m}$. ومع ذلك، تظهر مصطلح جديد مرتبط بمعامل المخمد $(\frac{\alpha}{m})$. هذا المعامل يساوي $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$، حيث λ هو معامل المخمد. لذلك، تكتب معادلة الحركة كما يلي:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{5}$$

2.4.3 حل معادلة الحركة

المعادلة (5.3) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بدون حد خارجي. تشكل مجموعة الحلول لهذه المعادلة فضاءً متجهًا ثنائي الأبعاد. يمكن التعبير عن الحل العام لهذه المعادلة كتركيبة خطية من حلين يشكلان أساسًا. يمكن العثور على هذا الأساس من خلال التركيز على الحلول الزمنية الأسية.

$$\begin{cases} x(t) = Ae^{rt} \\ \dot{x(t)} = Are^{rt} \\ \ddot{x(t)} = Ar^2e^{rt} \end{cases}$$

نستبدل الحدود الثلاثة في المعادلة (5.3)، مما يعطي:

$$Ar^2e^{-i\omega t} + 2\lambda Are^{-i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{-i\omega t} = 0$$

من خلال تحليل $Ae^{-i\omega t}$ ، نحصل على:

$$Ae^{-i\omega t}(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2) = 0 \qquad (6)$$

تُعرف المعادلة (6.3) بمعادلة الخصائص. إنها معادلة من الدرجة الثانية ويمكن أن تعطي إما جذرين حقيقيين مميزين، جذر مزدوج (ضمن الأعداد الحقيقية)، أو جذرين معقدين. يتم حساب التمييز المختصر على النحو التالي:

$$\Delta = \lambda^2 - \omega_0^2$$

يجب دراسة ثلاثة أنظمة:

نظام مخمد بشدة (غير دوري)

تعريف 1: (نظام مخمد)

في هذا النظام، يكون التمييز لمعادلة الخصائص إيجابيًا، مما يؤدي إلى جذرين حقيقيين متميزين. يشير ذلك إلى أن النظام يعود إلى التوازن دون تذبذب، مما يعني أنه غير دوري. لذلك، يكون الحل لمعادلة الحركة عبارة عن مجموعتين من الحدود الأسية المتناقصة، كل منهما مرتبطة بأحد الجذرين الحقيقيين.

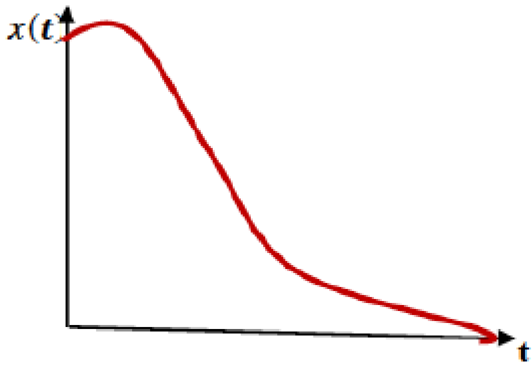
$$\Delta > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0$$

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-2\lambda+\sqrt{\Delta}}{2} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = \frac{-2\lambda-\sqrt{\Delta}}{2} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \Rightarrow x(t) = A_1 e^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t}$$

$$x(t) = e^{-i\omega t}\left[A_1 e^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t}\right]$$

تُحدد المعاملات A_1 و A_2 بواسطة شروط الإزاحة الأولية والسرعة.



شكل 5.3: النظام غير الدوري

من خلال إزاحة النظام من موضع توازنه، فإنه لم يعد يتذبذب ويتوقف تمامًا بعد فترة معينة من الزمن، والتي تعتمد على معامل المخمد. كلما كان معامل المخمد أكبر، كان وقت التوقف أقصر. يُطلق على هذا النظام اسم غير دوري، والمخمد ثقيل.

لا يُعتبر المصطلح $\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ ترددًا زاويًا لأنه في حالة النظام المخمد بشدة، لا يوجد تذبذب حول موضع التوازن.

النظام غير الدوري الحرج

يتوافق هذا مع الحالة التي يكون فيها التمييز المختصر صفرًا.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \omega_0$$

لدى معادلة الخصائص جذر حقيقي مزدوج.

$$r_1 = r_2 = -\lambda$$

لذلك، فإن الدالة $e^{-\lambda t}$ هي حل للمعادلة التفاضلية.

يمكن الحصول على الحل الثاني من خلال ملاحظة أن $te^{-\lambda t}$ هو أيضًا حل. وبالتالي، يتم كتابة الحل العام على النحو التالي:

$$x(t) = Ate^{-\lambda t} + Be^{-\lambda t} \Rightarrow x(t) = (At+B)e^{-\lambda t}$$

في حالة "النظام غير الدوري الحرج"، حيث يكون التمييز لمعادلة الخصائص صفراً، لدينا جذر حقيقي مزدوج. بالنسبة لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية بالشكل:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

تكون معادلة الخصائص:

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

حيث:

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ هو التردد الطبيعي غير المخمد، - $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$ هو نسبة المخمد.

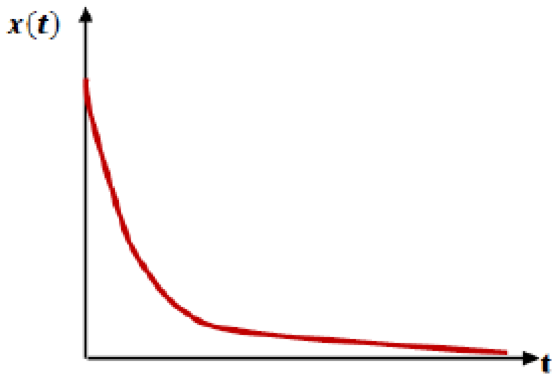
في حالة المخمد الحرج، $\zeta = 1$، لذا فإن التمييز يكون صفراً، وتكون معادلة الخصائص لها جذر مزدوج $r = -\omega_0$. الحل العام هو:

$$x(t) = (A+Bt)e^{-\omega_0 t}$$

حيث A وB هما ثوابت تحددها الشروط الأولية.

$$\begin{cases} \lambda = & \frac{\alpha}{m} \\ \omega_0 = & \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \Rightarrow \lambda = \omega_0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$$

حيث C: حرج $\alpha_C = 2\sqrt{km}$. يُعتبر النظام غير الدوري الحرج هو النظام الذي يعود إلى موضع توازنه بسرعة أكبر من أي نظام غير دوري آخر.



شكل 6.3: النظام غير الدوري الحرج

يُعرف المخمد بأنه مخمد حرج. تلعب الحالة الحرجة دورًا مهمًا في بعض التطبيقات العملية وتصميم أدوات القياس، حيث يعود النظام بعد الاضطراب إلى موضع راحته بأسرع ما يمكن دون تجاوز ذلك.

ملاحظة 1

بالنسبة للمخمد القوي $(\lambda \geq \omega_0)$، يعود النظام إلى موضع توازنه دون أن يتذبذب، وبالتالي، فإن الأوسيلور غير المخمد لا يتذبذب دائمًا.

النظام شبه الدوري

تعريف 2: (عامل الجودة)

النظام شبه الدوري هو مصطلح يُستخدم غالبًا في سياق الأنظمة الديناميكية، خاصة في الفيزياء والهندسة والرياضيات. ويصف سلوكًا يبدو أنه يحتوي على هيكل دوري منتظم ولكنه لا يتكرر بدقة بنفس الطريقة مثل السلوك الدوري الحقيقي. بمعنى آخر، على الرغم من أن النظام قد يبدو أنه يظهر نمطًا متكررًا، إلا أن الفواصل الزمنية أو السعات قد تختلف قليلاً أو تنحرف بمرور الوقت، مما يمنع التكرار الدقيق.

يتوافق مع الحالة التي يكون فيها التمييز المختصر سالبًا:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda < \omega_0$$

$$\Delta = (-1)(\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2(\omega_0^2 - \lambda^2)$$

حيث: ω_α هو التردد المخمد أو التردد شبه الدوري : $\omega_\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ لذا، فإن الحلول للمعادلة التفاضلية هي:

$$x(t) = A_1 e^{(-\lambda - i\sqrt{\Delta})t} + A_2 e^{(-\lambda + i\sqrt{\Delta})t}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t}(A_1 e^{-i\sqrt{\Delta}t} + A_2 e^{+i\sqrt{\Delta}t})$$

الحل للمعادلة هو:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}(A\cos\omega_\alpha t + B\sin\omega_\alpha t)$$

$$x(t) = A\cos(\omega_\alpha t - \varphi)$$

تُحدد الثوابت A و φ بواسطة الشروط الأولية. يقوم النظام بأداء تذبذبات ذات سعات متناقصة ويعطى "النظام شبه الدوري" بواسطة:

$$T_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_\alpha}$$

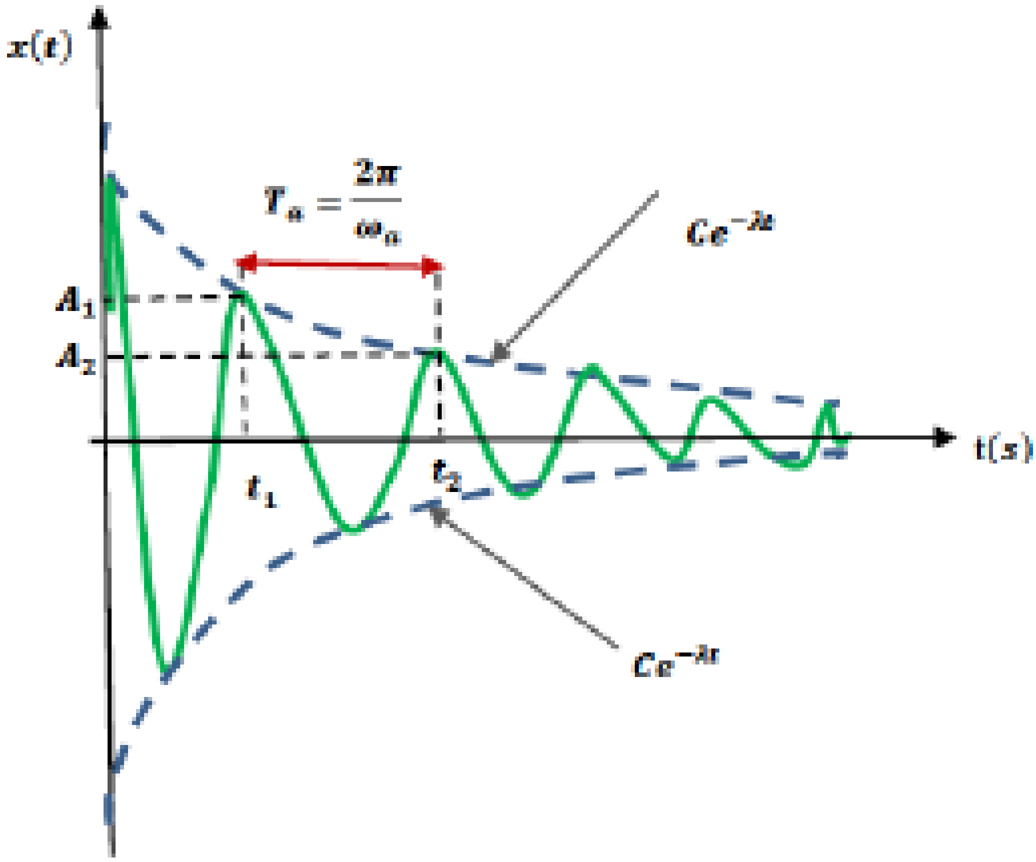
$$T_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_\alpha} \Rightarrow T_\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$$\omega_\alpha^2 = \omega_0^2 \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$T_\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T_\alpha = \frac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow T_0 < T_\alpha$$

إذا كان $\zeta^2 = 1 \Rightarrow \lambda \ll \omega_0$ لذا فإن $T-\alpha \simeq T_0$ تكون المنحنى $x(t)$ محاطة بواسطة اثنين من الأسس $Ae^{-\lambda t}$ و $-Ae^{-\lambda t}$ لأنه، من حيث القيمة المطلقة، لا يمكن أن يتجاوز $\cos(\omega_\alpha t - \varphi)$ الواحد. نرى أن x يصبح صفراً عندما يقترب t من موضع توازنه (انظر الشكل 7.3). هناك تردد شبه دوري، ويُوصف الحركة بأنها شبه دورية. المخمد ضعيف.



شكل 7.3: تذبذبات (شبه دورة)

يجب ملاحظة أن التردد شبه الدوري ω_α أقل من التردد الطبيعي ω_0، وأن الفترة شبه الدوري T_α أكبر من الفترة T_0 للمهتز غير المخمد المقابل.

في اهتزازات ميكانيكية، يتم تمثيل *النظام شبه الدوري* بشكل عام بواسطة نماذج رياضية تجمع بين الحدود الدورية والنصف دورية أو تشمل تأثيرات غير خطية. وغالبًا ما تستخدم هذه النماذج معادلات تفاضلية مترابطة أو تُدخل حدود بطيئة التغير لالتقاط الانحرافات عن الدوران الحقيقي. فيما يلي بعض المعادلات والصيغ المستخدمة بشكل شائع لوصف السلوك شبه الدوري في الأنظمة الميكانيكية.

الاهتزاز التوافقي بتردد أو سعة تتغير ببطء

يمكن أن يبدأ نموذج أساسي للاهتزاز شبه الدوري من الاهتزاز التوافقي مع معلمات تتغير ببطء:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega(t)\,t + \phi)$$

حيث: - $A(t)$ هو دالة سعة تتغير ببطء، - $\omega(t)$ هو تردد زاوي يعتمد على الزمن، - ϕ هو ثابت الطور.

في النظام شبه الدوري، تتغير $A(t)$ و $\omega(t)$ ببطء مع مرور الوقت، مما يقدم تغييرات صغيرة في الحركة الدورية بخلاف ذلك.

الاهتزاز المخمد المدفوع بترددين متنافسين

يمكن أن يظهر الاهتزاز المخمد المدفوع بترددين أو أكثر غير متناسقين أيضًا سلوكًا شبه دوري:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_1\cos(\omega_1 t) + F_2\cos(\omega_2 t)$$

حيث: - m هو الكتلة، - c هو معامل المخمد، - k هو الصلابة، - F_1 و F_2 هما قوتان مطبقتان عند ترددين مختلفين ω_1 و ω_2.

عندما تكون ω_1 و ω_2 ليست مضاعفات صحيحة لبعضها البعض، فإن النظام سيظهر حالة شبه دورية بسبب الدفع شبه الدوري.

المذبذب غير الخطي مع عدم خطية ضعيفة

يمكن أن يظهر المذبذب غير الخطي قليلاً سلوكًا شبه دوري، خاصة إذا كانت هناك رنين أو قرب رنين بين أوضاع الاهتزاز المختلفة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0$$

حيث α هو حد غير خطي صغير. تُعرف هذه المعادلة باسم *معادلة دوفينج*.

في الحالة شبه الدورية، تؤدي التأثيرات غير الخطية (هنا من خلال αx^3) إلى تقديم irregularities طفيفة في أنماط الاهتزاز، مما يتسبب في انحراف عن الدورية البسيطة.

3.4.3 التناقص اللوغاريتمي

(أو الانخفاض اللوغاريتمي)

تعريف 3: (عامل الجودة)

لنظام شبه دوري هو مقياس لمعدل انخفاض سعة الاهتزازات في نظام اهتزازي مخمد. ي quantfiies معدل فقدان الطاقة خلال كل دورة، مما يساعد في وصف المخمد في الأنظمة التي لا تهتز بدورية حقيقية.

في النظام شبه الدوري، حيث تكون الاهتزازات مخمدة ولكن ليست دورية تمامًا، لا يزال يمكن تطبيق التناقص اللوغاريتمي لتقريب سلوك الانخفاض. يُعرف بأنه اللوغاريتم الطبيعي لنسبة سعات القمم المتعاقبة في الاهتزاز المخمد.

تعريف التناقص اللوغاريتمي

يتم تعريف التناقص اللوغاريتمي δ كالتالي:

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_\alpha)}\right)$$

حيث: - $x(t)$ هو السعة في زمن معين t، - $x(t+T_\alpha)$ هي السعة بعد فترة شبه دورة واحدة T_α.

-معادلة التناقص اللوغاريتمي في الأنظمة المخمدة

بالنسبة لنظام مخمد قليل في حالة شبه دورية، يمكن تقريب التناقص اللوغاريتمي كالتالي:

$$\delta = \frac{2\pi\lambda}{\omega_\alpha}$$

حيث: - λ هو معامل المخمد (مرتبط بمعدل الانخفاض للغلاف $Ae^{-\lambda t}$), - ω_α هو التردد شبه الدوري (تردد الزاوي المخمد).

-انخفاض السعة في الحركة شبه الدورية

تنخفض السعة $A(t)$ للحركة شبه الدورية مع مرور الوقت وفقًا للغلاف الأسي:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

تُعطى الحركة $x(t)$ في الحالة شبه الدورية بـ:

$$x(t) = A_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_\alpha t + \phi)$$

في هذه المعادلة: - A_0 هو السعة الابتدائية، - ϕ هو الانزياح الطوري، - $\cos(\omega_\alpha t + \phi)$ يمثل المكون الاهتزازي مع التردد شبه الدوري ω_α.

يوفر التناقص اللوغاريتمي δ وسيلة لقياس مدى سرعة انخفاض الاهتزازات مع مرور الوقت ويكون مفيدًا بشكل خاص في تحديد خصائص المخمد في الأنظمة المخمدة قليلاً. بالنسبة لنظام مخمد:

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}\sin(\omega_\alpha t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \delta = \ln\frac{Ce^{-\lambda t}\sin(\omega_\alpha t + \varphi)}{Ce^{-\lambda(t_1+T_\alpha)}\sin(\omega_\alpha(t_1+T_\alpha)+\varphi)}$$

$$\Rightarrow \delta = \ln e^{\lambda T_\alpha} = \lambda T_\alpha$$

$$\lambda T_\alpha = \lambda\frac{T_\alpha}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \zeta\omega_0\frac{T_\alpha}{1-\zeta^2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

مع:

$$\delta = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = 2\pi\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \lambda T_\alpha$$

ملاحظة 2

بالنسبة لعدة دورات:

$$T = T_\alpha(t_1 = t_2 + nT_\alpha) \Rightarrow \delta\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_1+nT_\alpha)}\right) = 2\pi\frac{n\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

التردد شبه الدوري والتناقص اللوغاريتمي لهما معنى فقط إذا كان النظام شبه دوري.

4.4.3 الطاقة الكلية لمذبذب توافقي مخمد

نعتبر أن:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = Ae^{-\lambda t}\omega\cos(\omega t + \varphi) - A\lambda e^{-\lambda t}\sin(\omega t + \varphi)$$

في حالة المخمد الضعيف جدًا $\lambda \to 0$ ، فإن التردد شبه الدوري يساوي تقريبًا التردد الطبيعي للنظام، مما يعني:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

تُكتب الطاقة الكلية على النحو التالي:

$$E_T(T) = U + T \Rightarrow$$

$$E_T(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\lambda t}\sin^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}mA^2\left[e^{-2\lambda t}\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)+e^{-2\lambda t}\sin^2(\omega t+\varphi)\right]$$
$$-2\lambda\omega\sin(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\varphi)$$

إذا جعلنا المصطلحين الثاني والثالث من الطاقة الحركية يميلان نحو 0، نحصل على الطاقة الكلية بالتعبيرات الثلاث التالية:

$$E_T(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\lambda t}$$

حيث:

$$E_T(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 e^{-2\lambda t}$$

5.4.3 عامل الجودة

في مذبذب توافقي مخمد، يحدث فقدان للطاقة الميكانيكية. يتميز هذا الفقدان بمعامل أو عامل الجودة، Q، الذي يعكس كفاءة أو جودة المذبذب. يُعد عامل الجودة، المُشار إليه بـ Q، مقياسًا لكفاءة المذبذب في الاحتفاظ بالطاقة.

تعريف 4: (عامل الجودة)

يُشير عامل الجودة العالي إلى أن المذبذب يحافظ على طاقته بشكل فعال، مع تعرضه لفقدان طاقة ضئيل لكل دورة. في مذبذبات توافقي مخمدة (مثل البندول أو دائرة كهربائية مهتزة)، يتسبب المخمد في فقدان تدريجي للطاقة الميكانيكية بسبب الاحتكاك أو المقاومة. يكون عامل الجودة Q مرتبطًا عكسيًا بهذا الفقدان في الطاقة: كلما زادت قيمة Q، كان بإمكان المذبذب الاستمرار في الاهتزاز لفترة أطول دون فقدان كبير للطاقة.

$$Q = 2\pi\frac{E_m}{\Delta E}$$

$$Q = 2\pi\frac{E_T(t)}{\left[\frac{1}{2}kA^2e^{-i\omega t}-\frac{1}{2}kA^2e^{-2\lambda(t+T)}\right]}$$

$$\Rightarrow Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}kA^2 e^{-2\lambda t}}{\left[\frac{1}{2}kA^2 e^{-i\omega t} - \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\lambda(t+T)}\right]}$$

$$\Leftrightarrow Q = 2\pi \frac{1}{1-e^{-2\lambda t}}$$

من المفترض أن يكون المخمد ضعيفًا جدًا.
$\lambda \to 0$ و $e^{-2\lambda t} = 1 - 2\lambda T$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda T}$$

أيضًا:

$$Q = \frac{\omega}{2\lambda}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$$

$$\Delta \geq \Rightarrow \lambda \geq \omega_0$$

$$Q \leq \frac{1}{2}$$

لا توجد اهتزازات، والنظام غير دوري، يُكتب النظام شبه الدوري كالتالي:

$$T = \frac{2\lambda}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

$$T_0 = \frac{T_a}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

6.4.3 المذبذب التوافقي الكهربائي

يتضمن الدائرة المتذبذبة، بالإضافة إلى وجود الحث L والسعة C، أيضًا مقاومة أومية R. في هذا النوع من الدوائر، يسمح الحث L والسعة C باهتزاز الشحنة الكهربائية أو التيار، بينما تقدم المقاومة R تخميدًا. يتسبب هذا التخميد في انخفاض تدريجي في سعة الاهتزازات بمرور الوقت، مما يؤدي إلى فقدان الطاقة من خلال المقاومة.

$$U_R + U_c + U_L = 0$$

$$Ri(t) + \frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q + L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$R\dot{q}+\frac{1}{C}q+L\ddot{q}=0$$
$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$$
$$\Rightarrow \ddot{q}+2\lambda\dot{q}+\omega_0^2 q=0$$

مع:

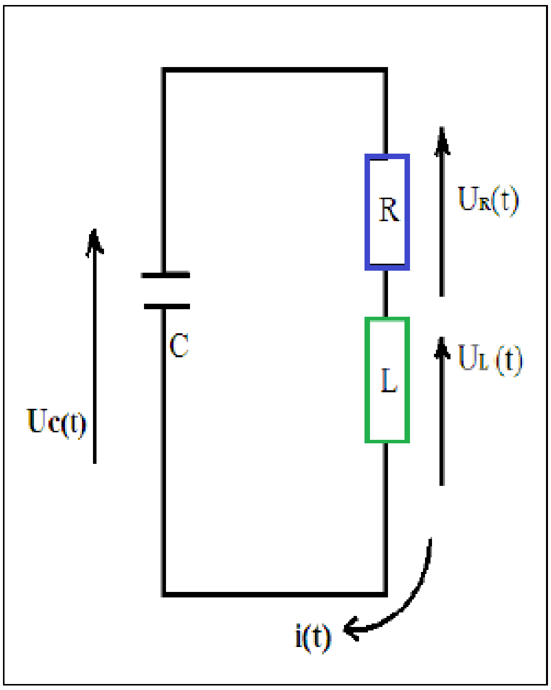
$$\begin{cases}\lambda = & \frac{R}{2L}\\ \omega_0^2 = & \frac{1}{LC}\end{cases}$$

لذا:

$$\ddot{q}+2\lambda\dot{q}+\omega_0^2 q=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda = & \frac{R}{2L}\\ \omega_0 = & \sqrt{\frac{1}{LC}}\end{cases}$$

ملاحظة 3

بالنسبة للتخميد الحرج $\lambda=\omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2L}=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ لذا: $R=R_c=2\sqrt{\frac{L}{C}}$



شكل 8.3: المذبذب التوافقي الكهربائي

الخاصية	اهتزازات ميكانيكية	اهتزازات كهربائية
معادلة الحركة	$m\ddot{x}+\lambda\dot{x}+kx=0$	$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=0$
النبضة الذاتية	$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}(rds^{-1})$	$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$
معامل الاحتكاك اللزج	$\lambda(N.s.m^{-1})$	$R(\Omega)$
معامل التخميد	$\alpha=\frac{\lambda}{2m}(s^{-1})$	$\alpha=\frac{R}{2L}$
النبضة المتخمّدة	$\omega_\alpha=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{2\lambda}{4m^2}}(rd.s^{-1})$	$\omega_\alpha=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$
عامل الجودة	$Q=\sqrt{\frac{mk}{\lambda}}$	$Q=\frac{L}{R}\sqrt{\frac{L}{R}}$
الطاقة الحركية	$T=E_K=\frac{1}{2}m\dot{x}^2(J)$	$E_{BO}=\frac{1}{2}Li^2$
الطاقة الكامنة	$E_p=\frac{1}{2}k\dot{x}^2(J)$	$E_{co}=\frac{q^2}{C}$
دالة الفقدان	$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$	$E_D=\frac{1}{2}Ri^2$

جدول 1.3: التشابه بين الاهتزازات الميكانيكية والكهربائية

المصادر

[1] E. Boyce, C Diprima, Elementary Differential Equations. Wiley, 9 edition, 2008.

[2] Earl A. Coddington, Norman Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Tata McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi, 1972.

[3] R. K. Nagle, E B. Saff, A. D. Snider, Fundamentals of Differential Equations. Pearson, 2017.

[4] C. Moler, C. V. Loan, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. SIAM Rev. 45(1), 49-3 , 2003.

[5] E.J. Putzer, Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients, A merican Mathematical Monthly **73**(1966), .7-2

[6] D. Somasundaram, Ordinary Differential Equations: A First Course. Narosa Publishing House, 2001.

[7] M. A. Al-Gwaiz, Sturm-Liouville Theory and its Applications, Springer, 2007.

[8] J. W. Brown, R. V. Churchill, Fourier Series and Boundary value problems, McGraw-Hill, 8th ed, 2012.

[9] حسن مصطفى العويضي، المعادلات التفاضلية "الجزء الثاني"، مكتبة الرشد، 2015 .