Chapitre 1: intégrale Simples et intégrales Multiples

2. Intégrales multiples et calcul d'aire :

2.1. Intégrale double :

Soit $z = F(x,y)$ une fonction définie dans un domaine D fermé et borné du plan xoy. Décomposons le domaine D d'une façon arbitraire en n domaines élémentaires de surfaces $\Delta_{s_1}, \Delta_{s_2}, \dots, \Delta_{s_n}$. Choisissons maintenant dans chaque domaine élémentaire un point arbitraire $(P_k)_{1\leq k\leq n}$.

Soient $F(P_1), F(P_2), \dots, F(P_n)$ les valeurs de la fonction $F(x,y)$ en ces points, et formons ensuite les produits $F(P_k)\Delta_{s_k}$. On appelle somme intégrale de la fonction $F(x,y)$ dans le domaine D une somme de la forme.

$$\sum_{k=1}^{n} F(P_k)\Delta_{s_k} = F(P_1)\Delta_{s_1} + F(P_2)\Delta_{s_2} + \cdots + F(P_n)\Delta_{s_n}$$

On appelle intégrale double de la fonction $F(x,y)$ sur le domaine D la limite de la somme intégrale quand le plus grand des domaines $\Delta_{s_k} \to 0$. On note :

$$\iint F(x,y)\,dxdy = \iint F(P)\,ds = \lim_{max\Delta_{s_k}\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\,\Delta_{s_k}$$

2.2. Règle de calcule d'une intégrale double

Soit $F(x,y)$ une fonction définie et continue dans un domaine fermé D de $\mathbb{R}^2$, ce domaine est tel que :

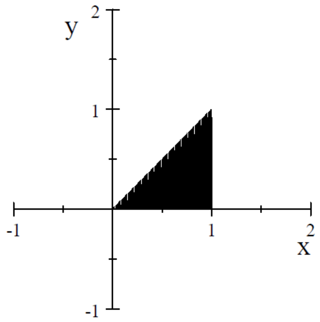
$$\begin{cases} \text{si } a \leq x \leq b \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \\ \qquad\qquad ou \\ \text{si } c \leq y \leq d \quad \Longrightarrow \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \end{cases}$$

Alors l'intégrale double de la fonction F sur D se calcule par la manière suivante :

$$\iint F(x,y)\,dxdy = \int_a^b [\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dy]dx = \int_c^d [\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)dx]dy$$

Exemple : Calculer l'intégrale double suivante : $I_1 = \iint \frac{x}{\sqrt{y}}\,dxdy$

Où le domaine D est défini par : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y \leq x < 1\}$



Soit $(x, y) \in D$, on choisit $0 < x < 1$, il vient $0 < y \leq x$. Alors,

$$I_1 = \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{x}{\sqrt{y}} dy\right] dx = \int_0^1 x[2\sqrt{y}]_0^x \, dx = 2\int_0^1 (x\sqrt{x}) \, dx = 2(\frac{2}{5} x^{5/2})_0^1 = \frac{4}{5}$$

2.3. Théorème de Fubuni ou Intégration sur un pavé : Soit F(x, y) une fonction définie et continue dans un pavé $D = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$: Alors,

$$\iint F(x,y) \, dxdy = \int_a^b [\int_c^d F(x,y) \, dy] dx = \int_c^d [\int_a^b F(x,y) dx] dy$$

Exemple : Calculer l'intégrale double suivante : $I_2 = \iint (x^2 + y) \, dxdy$

Si le domaine $D = [0,1] \times [1,2]$:

D'après le théorème de Fubini on a :

$$\iint (x^2 + y) \, dxdy = \int_0^1 \left[\int_1^2 (x^2 + y) \, dy\right] dx = \int_0^1 [x^2 y + \frac{1}{2} y^2]_1^2 \, dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{3}{2}) \, dx$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x\right)_0^1 = \frac{11}{6}$$

2.4. Changement de variables d'une intégrale double

2.4.1. Intégrale double en coordonnées curvilignes :

On suppose que les variables d'intégration x et y peuvent s'exprimer en fonction de nouvelles variables u et v comme suit :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Où les fonctions $x(u, v)$ et $y(u, v)$ admettent des dérivées partielles continues dans un domaine D' du plan $uo'v$, et le jacobien de la transformation dans le domaine D' ne s'annule pas :

$$J = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Alors , la formule de la transformation d'une intégrale double aux coordonnées curvilignes comme suit :

$$\iint F(x,y)\,dxdy = \iint F(x(u,v),y(u,v))|J|\,dudv$$

Exemple: Effectuer le changement de variable indiqué dans l'intégrale suivante:

$$I_4 = \int_0^1 dx \int_x^{2x} F(x,y)\,dy, \qquad \begin{cases} u = x+y \\ v = \dfrac{y}{x+y} \end{cases}$$

Les nouvelles valeurs de x et y en fonction de (u,v) sont :

$$\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv \end{cases}$$

Donc,

$$J = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

Le nouvelle domaine D' est :

$$D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2} \leq v \leq \frac{2}{3}, \qquad 0 \leq u \leq \frac{1}{1-v}\}$$

Alors l'intégrale I_4 est :

$$I_4 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} dv \int_0^{\frac{1}{1-v}} uG(u,v)\,du$$

2.4.2. Intégrale double en coordonnées polaires

Lorsqu'on passe des coordonnées rectangulaires (cartésiennes) x et y aux coordonnées polaires r et θ posant :

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases} \text{avec } r > 0 \; et \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

On a : $J = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r$

L'intégrale double d'une fonction F aux coordonnées polaire est :

$$\iint F(x,y)\,dxdy = \iint F(rcos\theta, rsin\theta)\,rdrd\theta$$

Exemple : Calculer :$I_5 = \iint \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ où le domaine D est définie par :

$$D == \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

On a les coordonnées polaires sont : $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$

$$4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\,, 2 \leq r \leq 3 \; de\; plus\; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

On a

$$I_5 = \iint \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \iint \frac{rdrd\theta}{r^2cos^2\theta + r^2sin^2\theta} = \int_2^3 \frac{1}{r}dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi[\ln r]_2^3 = \pi \ln\frac{9}{4}$$

2.5. Calcul des aires dans $\mathbb{R}^2$

L'aire d'une figure plane limitée par le domaine D se calcule par la formule $A(D)$:

$$A(D) = \iint dxdy$$

2.6. Calcul des aires dans $\mathbb{R}^3$

Soit S une surface lisse uniforme est donnée par l'équation $z = f(x;\, y)$; alors l'aire de la surface S est exprimée par la formule :

$$A(S) = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{dy}\right)^2}\, dxdy$$