Chapitre 1: intégrale Simples et intégrales Multiples

3. Intégrale triple

Soit $F\ (x, y, z)$ une fonction définie dans un domaine D fermé et borné de l'espace Ox, Oy, Oz. Partageons le domaine D d'une façon arbitraire en n domaines élémentaires de volumes $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. Prenons maintenant dans chaque domaine élémentaire un point arbitraire $(Pk)_{1\leq k\leq n}$ de l'espace. Soient $F(P_1), F(P_2), \ldots, F(P_n)$ les valeurs de la fonction $F\ (x, y, z)$ en ces points, et formons ensuite les produits $F(P_k)\Delta V_k$.

On appelle somme intégrale de la fonction $F(x, y, z)$ dans le domaine D une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} F(P_k)\Delta V_k = F(P_1)\Delta V_1 + F(P_2)\Delta V_2 + \cdots + F(P_n)\Delta V_n$$

On appelle intégrale triple de la fonction $F(x, y, z)$ sur le domaine D la limite de la somme intégrale quand le plus grand des volumes $\Delta V_k \to\ 0.$ On note

$$\iiint F\ (x, y, z)dxdydz = \iiint F(P_k)dV = \lim_{max\Delta V_k\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\Delta V_k$$

3.1 Règle de calcule d'une intégrale Triple

Soit F une fonction définie et continue dans un domine fermé D de $\mathbb{R}^3$ alors:

$$\iiint F(x, y, z)\ dxdydz = \iint dxdy \int_{z_1}^{z_2} F(x, y, z)dz$$

L'intégrale double sur $dxdy$ calculé sur le domaine T, tel que le domine T est la projection orthogonale de D sur le plan xOy.

Exemple : calculer l'intégrale triple $I_1 = \iiint (x + y + z)\ dxdydz$ le domaine D défini par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z \leq 2\}$$

La projection orthogonale du domaine D sur le plan xOy dont $z = 0$ est

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y \leq 2\}$$

De plus $z_1 = 0$ et $z_2 = 2 - x - y$ et $z_1 \leq z \leq z_2$

Donc,

$$I_1 = \iint dxdy \int_0^{2-x-y} (x + y + z)dz = \iint \left[(x + y)z + \frac{1}{2}z^2\right]_0^{2-x-y}$$

$$= \iint [2x + 2y - x^2 - y^2 - 2xy + \frac{1}{2}(2 - x - y)^2]dxdy$$

On a :

$$\begin{cases} 0 < y < 2 - x \\ 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Donc l'intégrale double de cette fonction est :

$$I_1 = \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} 2x + 2y - x^2 - y^2 - 2xy + \frac{1}{2}(2 - x - y)^2 dy\right] dx$$

$$= \int_0^2 [(2 - x)xy + y^2 - \frac{1}{6}y^3 - xy^2 + \frac{1}{2}(2 - x^2)y - \frac{1}{2}(2 - x)y^2]_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^2 [(2 - x)^2 - \frac{(2 - x)^3}{6}] dx$$

$$= [-\frac{(2 - x)^3}{3} + \frac{(2 - x)^4}{24}]_0^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$$

3.2. Changement de variables d'une intégrale Triple

Le changement de variable d'une intégrale triple permet de passer des variables *x*, *y*, *z* aux nouvelles variables *u*, *v*, *u* liées aux premières par les relations

$$x = x(u, v, u),$$

$$y = y(u, v, u),$$

$$z = z(u, v, u),$$

Où $x = x(u, v, u), y = y(u, v, u)$ et $z = z(u, v, u)$ et leurs dérivées partielles premières sont des fonctions continues dans un domaine *D'* et le jacobien de la transformation dans le domaine *D'* est :

$$J = \left|\frac{D(x, y, z)}{D'(u, v, w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

Dans ce cas, la formule de la transformation d'une intégrale triple est :

$$\iiint F(x, y, z)\, dxdydz = \iiint F(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)|J|dudvdw$$

3.4. Intégrale Triple en coordonnées sphériques

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. On a alors, la formule de transformation suivant :

$$x = r \cos\theta \sin\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\varphi$$

Avec $> 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Le jacobien est :

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta \sin\varphi & -r\sin\theta \sin\varphi & r\cos\theta \cos\theta \\ \sin\theta \sin\varphi & r\cos\theta \sin\varphi & r\sin\theta \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin\varphi$$

Il vient que $dxdydz = r^2 \sin\varphi \, drd\theta d\varphi$

Exemple : Calculer $I_2 = \iiint x^2 \, dxdydz$, Où le domaine D définie par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, a > 0\}$$

On effectue un changement de variable aux coordonnées sphériques.

Soit maintenant (x, y, z) un point de D, nous avons

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \text{ D'où } r^2 \leq a^2 \text{ alors } 0 \leq r \leq a$$

Alors :

$$I_2 = \iiint x^2 \, dxdydz = \int_0^a r^4 \, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi$$
$$= \left[\frac{1}{5} r^5\right]_0^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi$$
$$= \frac{4}{15} \pi a^5$$

3.5. Intégrale Triple en coordonnées cylindriques

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques liées par les relations suivant :

$$x = r\, cos\, \theta$$
$$y = r\, sin\, \theta$$
$$z = z$$

Avec $r > 0 \; et \; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

Le jacobien est : $J = r$

$$\iiint F(x, y, z) \, dxdydz = \iiint F(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \, rdrd\theta dz$$

3.6. Calcul des volumes

Le volume d'un corps qui occupe le domaine D est donné par la formule suivant :

$$V = \iiint dxdydz$$