Chapitre 1: intégrale Simples et intégrales Multiples

1. Rappels sur l'intégrale de Riemann et Calcule de Primitives:

Subdivision: soit $[a, b]$ un intervalle finie, on appelle subdivision S de $[a, b]$ toute suite finie ordonnée $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$.

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$$

On appelle **"pas"** de subdivision S est:

$$\rho(S) = max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i|$$

La subdivision uniforme de l'intervalle [a,b] est $\frac{b-a}{n}$ et chaque point calculer par l'équation suivant :

$$t_i = a + i\frac{b-a}{n}, 0 \leq i \leq n$$

Intégrale de Riemann

Par la définition l'intégrale de Riemann de la fonction f est :

$$\int_a^b f(x)\, dx = Sup_S A^+(f, S) = Inf_S A^-(f, S)$$

Une fonction $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable sur $[a, b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S telle que ses sommes Darboux vérifient :

$$A^+(f, S) - A^-(f, S) \leq \varepsilon$$

La somme de Darboux inferieur :

$$A^-(f, S) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i)$$

Avec :

$$m_i = inf_{x \in [t_i, t_{i+1}[} f(x)$$

La somme de Darboux supérieur :

$$A^+(f, S) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (t_{i+1} - t_i)$$

Avec :

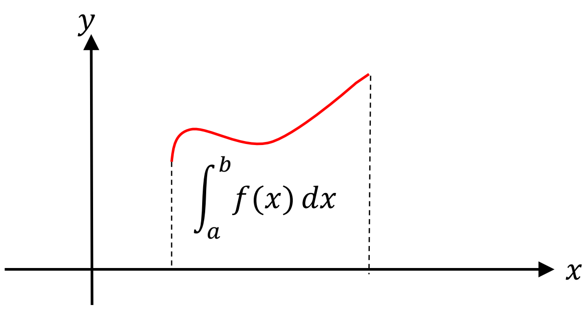
$$M_i = sup_{x \in [t_i, t_{i+1}[} f(x)$$

Si la subdivision est uniforme, la somme de Riemann prend cette forme :

$$R(f, S_{unif}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})$$

Calcul de Primitives :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, l'intégrale de cette fonction est l'aire exprimé en unités d'aire de la surface comprise entre la courbe C_f et l'axe d'abscisse bornée par les doits $x = a \; et \; x = b$.



On considère une fonction f continue sur un intervalle I. on dit qu'une fonction F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable :

$$F(x)' = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Primitives des fonctions usuelles :

On a c : est une constante réelle

- $\int 1\,dx = x + c$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \cos(x)\,dx = sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a} arctang(\frac{x}{a}) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = arcsin(\frac{x}{a}) + c$
- $\int \frac{1}{sin^2(x)}\,dx = cotg(x) + c$
- $\int \text{tang(x)}\,dx = -\ln(\cos(x)) + c$
- $\int \frac{1}{cos^2(x)}\,dx = tang(x) + c$

Les fonctions suivantes découlent toutes les règles de dérivation :

$$\int [u(x)]^n u'(x)\,dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^{u(x)} u'(x)\,dx = e^{u(x)} + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + c$$

$$\int \sin\big(u(x)\big)\,u'(x)\,dx = -\cos\big(u(x)\big) + c$$

$$\int \cos\big(u(x)\big)\,u'(x)\,dx = \sin\big(u(x)\big) + c$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,dx = -\frac{1}{u(x)} + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$\int u'(x)tang\big(u(x)\big)\,dx = -\ln(\cos(x)) + c$$

Quelques formules de trigonométrie utiles :

- $tang(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $cotg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
- $cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(2x) = 2cos^2(x) - 1 = 1 - 2sin^2(x)$

Intégrale par parties :

Soient $u\ et\ v$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Exemple : calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin(x)\,dx$$

On pose : $u(x) = x$, $u'(x) = 1$ $et\ v'(x) = \sin(x)$, $v(x) = -\cos(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin(x)\,dx = [-xcos(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\,dx = [-xcos(x)]_0^{\pi/2} + [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$$

Changement de variable :

Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue on suppose qu'il existe une application

$v: [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et une application u, continue sur $v([a, b])$ telles que pour touts x de $[a, b]$ ou ait l'égalité suivante :

$$f(x) = u(v(x))v'(x)$$

Alors on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(y)\, dy$$

Dans le calcul pratique on pose : $y = v(x), d'o$ù $dy = v'(x)dx$

Enfin, on change les bornes de l'intégrale.

Exemple : calculer la primitive suivant par un changement de variable :

$$\int_0^2 \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

On utilise le changement de variable suivant :

$$y = v(x) = \sqrt{x}$$

on obtient :

$$v(a) = 0, v(b) = \sqrt{2}\ et\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^2 \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 4\int_0^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 4\int_0^{\sqrt{x}} e^y\, dy = [e^y]_0^{\sqrt{2}} = 4(e^{\sqrt{2}} - 1)$$

Primitives des fractions rationnelles :

On appelle fraction rationnelle le quotient de deux polynômes, la plupart des primitives que l'on sait calculer formellement par des changements de variable simple :

- Intégrale du type $\int \frac{1}{x+\alpha} dx, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x+\alpha}\,dx = \ln|x+\alpha| + c, c \in \mathbb{R}$$

- Intégrale de type $\int \frac{1}{(x+\alpha)^n}\,dx, \alpha \in \mathbb{R}\ et\ n \geq 1$

$$\int \frac{1}{(x+\alpha)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)(x+\alpha)^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$$