

الفصل الرابع قوانين نيوتن للحركة

- ١-٤ مقدمة
- ٢-٤ قانون نيوتن الأول للحركة
- ٣-٤ قانون نيوتن الثاني للحركة
- ٤-٤ كتلة القصور الذاتي
- ٥-٤ قانون نيوتن الثالث للحركة
- ٦-٤ تطبيقات على قانون نيوتن في الحركات الأفقية والرأسية والمائلة
- ٧-٤ قوى الإحتكاك
- ١٠-٤ قانون نيوتن للجاذبية الأرضية
- ١-١٠-٤ مفاهيم أساسية
- ٢-١٠-٤ الوزن وقوة الجاذبية الأرضية



٢-٤ المقدمة

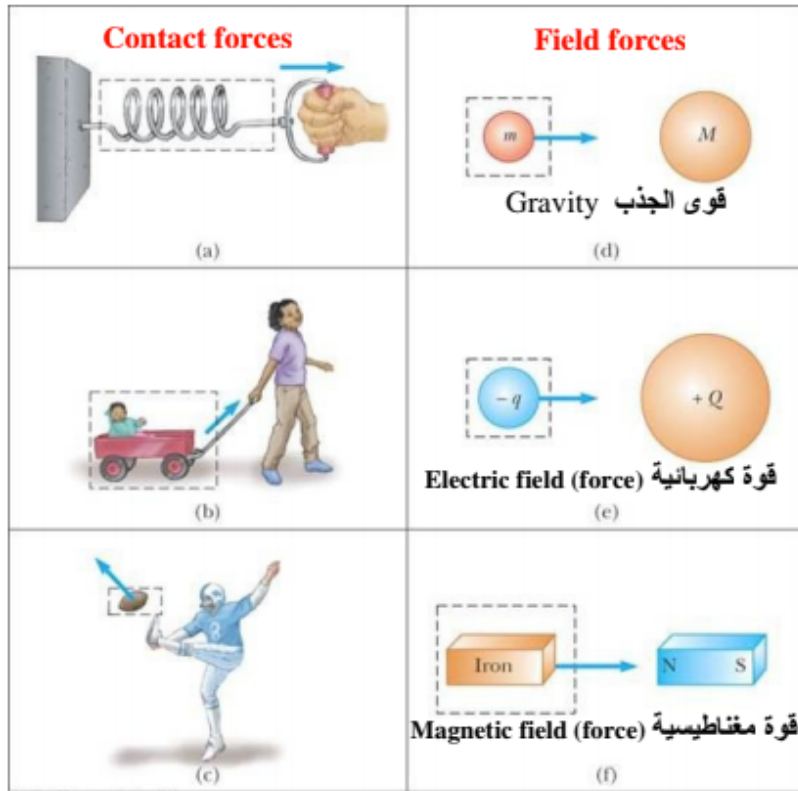


• سندرس في هذا الفصل:

- ١ - قوانين نيوتن للحركة .
- ٢ - أنواع القوى المؤثرة على الأجسام .
- ٣ - تطبيقات على قوانين نيوتن .
- ٤ - قوى الاحتكاك .
- ٥ - قانون نيوتن للجاذبية الكونية .
- ٦ - حل بعض المسائل .



القوى المؤثرة على الأجسام:



١- قوى التلامس: هي التي تنتج عن تلامس أو تصادم بين الجسم

والمحيط، وقد تسبب في تشوه في الشكل، أو تغيير في الحركة، أو الأثنين معا.

٢- قوى المجال: هي القوى التي تؤثر عن بعد عبر الفضاء، مثل: قوة

التجاذب بين كتلتين، والقوة الكهربائية بين شحنتين، والقوة المغناطيسية بين قطبي مغناطيس.

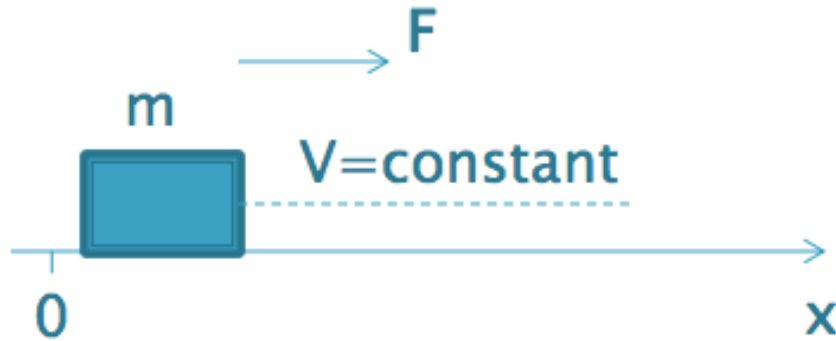


٤-٢ قانون نيوتن الأول للحركة



Sir Isaac Newton
(1642 – 1727)

ينص على أنه : يبقى الجسم الساكن على حالته الساكنة ،
ويبقى الجسم المتحرك بسرعة ثابتة في خط مستقيم على
حالته من الحركة ما لم تجبرهما قوى خارجية على تغيير
حالتيهما .



$$\sum \vec{F} = 0, \vec{a} = 0$$

تبرز من هذا القانون خاصية مرتبطة بأجسام المادية وهي
خاصية القصور الذاتي



القصور الذاتي





- وعليه، إذا كان الجسم معزولاً*، يمكن تعريف مرجع إسناد يكون فيه التسارع صفراً. وهذا النوع من مراجع الإسناد هي مراجع خاصة تسمى "مراجع الإسناد القصورية": وهي مراجع غير متسارعة وتكون فيها قوانين نيوتن صحيحة. لهذا السبب يدعى قانون نيوتن الأول "قانون القصور أو الجمود".

- مراجع الإسناد القصورية Inertial Frames of Reference
 - مرجع الإسناد القصوري هو المرجع الذي يكون تسارعه صفراً، أي ساكناً أو متحركاً بسرعة ثابتة. أما المراجع المتسارعة فهي "مراجع إسناد غير قصورية".
 - أي مرجع إسناد يتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لأي "مرجع قصوري" يكون نفسه مرجعاً قصورياً.

صياغة أخرى لقانون نيوتن الأول: عند النظر إليه من "مرجع إسناد قصوري"، فإن الجسم المعزول يكون إما "ساكناً" أو "متحركاً بسرعة ثابتة (مقداراً واتجاهاً)".

* الجسم المعزول هو الذي لا يتفاعل مع أجسام أخرى أو لا تؤثر عليه قوى خارجية (محصلة القوى الخارجية عليه صفراً أي تسارعه = 0).



٣-٤ قانون نيوتن الثاني للحركة

ينص على أنه: إذا كانت محصلة القوى المؤثرة على جسم أكبر من الصفر، فإنها تتسبب في تسارعه في اتجاه القوة بحيث يتناسب مقدار التسارع a طرديًا مع محصلة القوة وعكسيًا مع كتلة الجسم m .

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ويمكن كتابتها بدلالة المركبات كالتالي:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_z = ma_z$$



٤-٤ كتلة القصور والوزن

تتضح من قانون نيوتن الثاني العلاقة بين الكتلة والقصور الذاتي، حيث أنه كلما زادت كتلة الجسم، تطلب الأمر قوة أكبر لتحريكه من السكون أو إيقافه عن الحركة.

الكتلة: هي كمية المادة الموجودة في الجسم، وتعتمد على عدد الذرات والجزيئات الموجودة فيه وهي كمية قياسية وتُقاس بوحدة الكيلوجرام.

الوزن: هو قوة الجاذبية الأرضية المؤثرة على الجسم لتحدث به تسارعًا مقداره g ويُقاس بوحدة النيوتن.

الكتلة: "كتلة الجذب" و "كتلة القصور"

- القصور (الجمود) الذاتي Inertia: هو نزعة الجسم للمحافظة على حالته، أي يقاوم أي محاولة لتغيير حالته.
- "الكتلة" مقابل "الوزن" Mass versus Weight: الكتلة والوزن هما كميتان مختلفتان
 - كتلة الجسم (m) تعبر عن قصوره (أو جموده)، أي تقيس قدرته على مقاومة تغيير حركته.
 - وزن الجسم (W) يساوي مقدار قوة جذب الأرض له. أي ان وزن كتلة مقدارها m يساوي قوة جذب الأرض لهذه الكتلة:

$$\vec{W} \equiv \vec{F}_g = m\vec{g} \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

Weight
الوزن

Gravitational force
قوة الجاذبية

إنتبه: وحدة الوزن ليست "kg" بل "Newton N". أ ل "kg" هي وحدة الكتلة.

بينما كتلة أي جسم هي نفسها في أي مكان، الوزن يتغير من مكان لآخر معتمدا على قيمة ثابت الجاذبية g .

• كتلة الجذب" و "كتلة القصور" Gravitational mass versus inertial mass

- كتلة الجذب Gravitational mass: في قوة الجاذبية (معادلة 5.4)، الكتلة m هي كتلة الجذب والتي تحدد قوة التجاذب بين الجسم والأرض.
- كتلة القصور inertial mass: في قوانين نيوتن، الكتلة هي كتلة القصور والتي تقاوم أي محاولة لتغيير حركة الجسم.
- كتلة الجذب = كتلة القصور.

٤-٥ قانون نيوتن الثالث للحركة



ينص على أنه: لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد في الاتجاه.
أو: إذا أثر جسم بقوة ما على جسم آخر، فإن الأخير يؤثر على الأول بقوة مساوية لها في المقدار ومضادة في الاتجاه.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

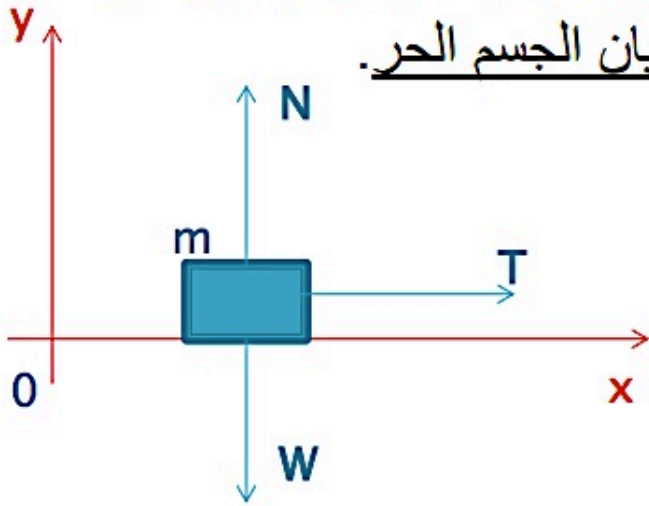
مثال ٤-١

٦-٤ تطبيقات على قوانين نيوتن للحركات الأفقية والرأسية والمائلة



٦-٤-١ قوى الشد

تنشأ هذه القوى نتيجة تأثير قوة شد على كتلة m ، ويرمز لها بالرمز T . ويمكن تمثيل القوى المؤثرة على الجسم بواسطة مخطط بيان الجسم الحر.
بتطبيق قانون نيوتن الثاني في اتجاه x :



$$\sum F_x = ma_x \rightarrow T = ma_x \rightarrow a_x = \frac{T}{m}$$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني في اتجاه y :

$$\sum F_y = 0 \rightarrow a_y = 0$$

$$N - W \rightarrow N = W$$

وباستخدام معدلات الحركة فيمكن حساب الازاحة والسرعة على النحو التالي:

$$\Delta x = v_i t + \frac{1}{2} \left(\frac{T}{m} \right) t^2 \quad v_f = v_i + \left(\frac{T}{m} \right) t$$



أمثلة

في المثالين التاليين، نناقش أجساما في حالة اتزان ($\vec{a} = 0$).

مثال (1): صندوق ساكن على سطح أفقي



شكل 5.4a

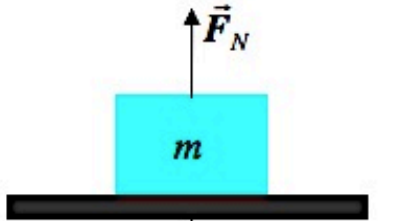
الشكل (5.4a) يوضح صندوقا كتلته m على سطح أفقي.

الشكل (5.4b) يمثل مخطط "الجسم الحر" للصندوق: الصندوق يتأثر بقوتين

• قوة الجاذبية \vec{F}_g (لأسفل).

• قوة عمودية \vec{F}_N Normal force ، متعامدة على السطح (لأعلى).

بما أن الصندوق ساكن، فإن تسارعه صفر. ومن قانون نيوتن الثاني نجد:



شكل 5.4b

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{F}_N + \vec{F}_g &= 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{F}_N &= -\vec{F}_g \\ F_N &= F_g = w \end{aligned}} \end{aligned}$$

لاحظ: رغم وجود القوتين F_N و F_g إلا أن الصندوق لا يتحرك وذلك لأن القوتين متساويتان ومتعاكستان فيلغيان بعضهما بعضا، حسب قانون نيوتن الثالث. أي أنهما "زوج قوى قانون نيوتن الثالث".



مثال (2): صندوق معلق.

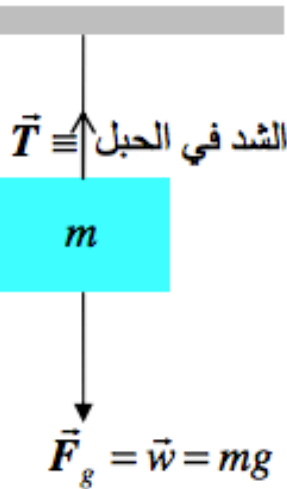
إذا علقنا صندوق المثال (1) بحبل، كما يوضح الشكل (5.5)، أوجد الشد في الحبل.
الحل:

مرة أخرى لدينا قوتين فقط تؤثران على الصندوق: الشد (لأعلى) والوزن (لأسفل).
وبما أن الصندوق ساكن، فتسارعه صفراً: من قانون نيوتن الثاني نجد

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{T} + \vec{F}_g = 0 \Rightarrow \vec{T} = -\vec{F}_g$$

$$T = F_g = w$$



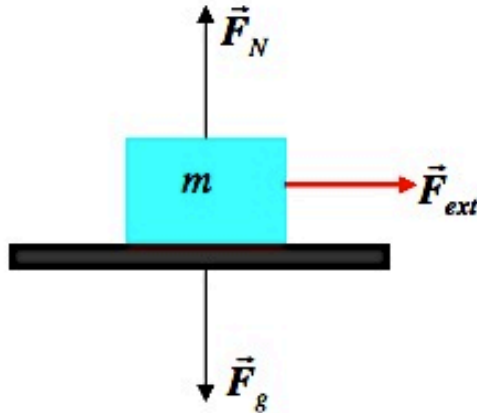
شكل 5.5

مرة أخرى، القوتان T و F_g هما "زوج قانون نيوتن الثالث"، يلغيان بعضهما ويبقى الصندوق في حالة سكون.



مثال (3):

إذا أثرت قوة خارجية على صندوق المثال (1) وسحبته على سطح أملس عديم الإحتكاك، كما في الشكل (5.6). أوجد ما يلي:



شكل 5.6

- (أ) تسارع الصندوق.
(ب) القوة التي يؤثر بها السطح على الصندوق.

الحل:

تحدد القوى المؤثرة على الصندوق، ونرسم الشكل المناسب:

- القوة الخارجية الأفقية، \vec{F}_{ext} .
- القوتان العموديتان: \vec{F}_g و \vec{F}_N .

(أ) من قانون نيوتن الثاني: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{F}_N + \vec{F}_g + \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

ولكن من مثال (1) وجدنا أن $F_N = F_g$ (زوج قانون نيوتن الثالث)، يلغيان بعضهما.

باختصار: القوة الوحيدة التي تسارع الصندوق هي القوة الخارجية \vec{F}_{ext} .

$$\vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}_{ext}}{m}$$

(ب) القوة التي يؤثر بها السطح على الصندوق هي القوة العمودية لأعلى: $F_N = F_g = mg$



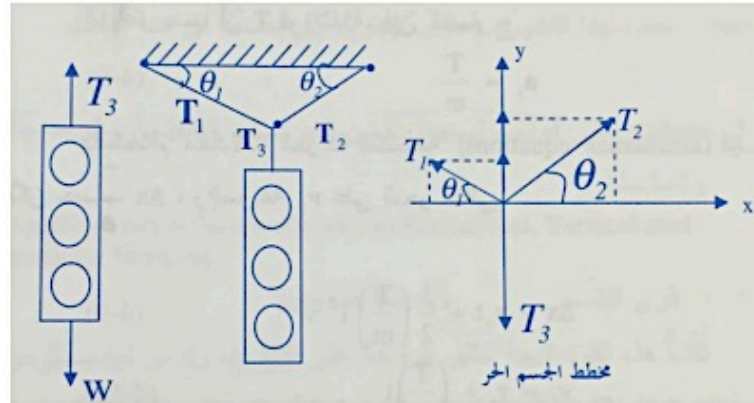
٤-٦-٢ توازن جسم معلق

بفرض أن وزن اشارة مرور هو W وتم تعليقها كما في الشكل، بتطبيق قانون نيوتن سنحصل على:

$$\Sigma F_x = T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 = 0$$

$$\Sigma F_y = T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 - T_3 = 0$$

$$T_3 = w$$

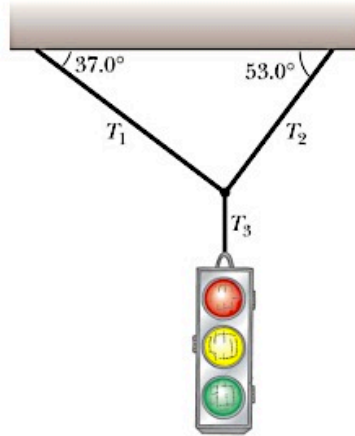


مثال ٤-٩

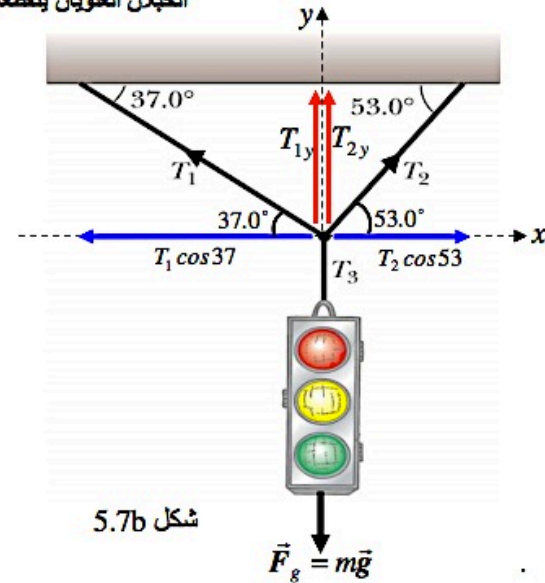


مثال 4:

الشكل (5.7a): إشارة ضوئية تزن 122 N ، أي أن $F_g = w = 122\text{ N}$.
الحيلان العلويان ينقطعان إذا زاد الشد فيهما عن 100 N . أوجد T_1 و T_2 .



شكل 5.7a



شكل 5.7b

الحل: النظام في حالة اتزان ($a = 0$). نحلل القوتان (الشدان T_1 و T_2) الى مركبتيهما، كما في شكل (5.7b)، ونطبق قانون نيوتن الثاني على كل من المركبتين السينية والصادية:

$\sum F_x = 0$ المركبة السينية:

$$\sum F_x = T_2 \cos 53 - T_1 \cos 37 = 0 \Rightarrow T_1 \cos 37 = T_2 \cos 53 \dots (5.7)$$

$\sum F_y = 0$ المركبة الصادية:

$$T_{y1} + T_{y2} - F_g = 0$$

$$T_1 \sin 37 + T_2 \sin 53 - 122\text{ N} = 0 \Rightarrow T_1 \sin 37 + T_2 \sin 53 = 122\text{ N} \dots (5.8)$$

لنجد T_1 و T_2 ، نحل المعادلتين (5.7) و (5.8) معا:

$$T_1 = T_2 \left(\frac{\cos 53}{\cos 37} \right) = 0.754 T_2 \quad \text{من المعادلة (5.7):}$$

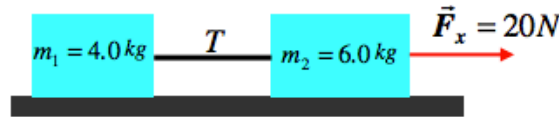
ثم نعوض T_1 في المعادلة (5.8) لنجد T_2 : $(0.754 T_2) \sin 37 + T_2 \sin 53 = 122\text{ N}$

$$\Rightarrow T_2 = 97.6\text{ N} \quad \text{and} \quad T_1 = 0.754 T_2 = 73.6\text{ N}$$

لاحظ أن كل من القيمتين أقل من 100 N ، وبالتالي لا ينقطع الحبلان.



مثال (5): صندوقان موصولان بحبل، ويسحبان بقوة مقدارها 20.0 N، كما يوضح الشكل (5.8). أوجد ما يلي:

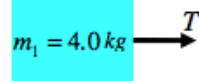


- (أ) تسارع كل صندوق.
(ب) الشد T في الحبل.

شكل 5.8

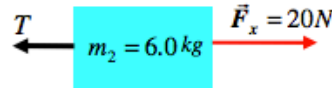
الحل:

(أ) طبق قانون نيوتن الثاني على مخطط "الجسم الحر" للصندوق الأول:



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow T = m_1 a \dots\dots\dots (5.9)$$

ومن "الجسم الحر" للصندوق الثاني:



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_x - T = m_2 a \dots\dots (5.10)$$

وبحل المعادلتين (5.9) و (5.10):

$$\begin{aligned} T &= m_1 a \\ F_x - T &= m_2 a \\ \hline F_x &= (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{F_x}{(m_1 + m_2)} = \frac{20N}{(4.0 + 6.0)kg} = 2.0 m/s^2 \end{aligned}$$

(ب) الشد في الحبل: من المعادلة (5.9): $T = m_1 a = 4.0 \times 2.0 = 8.0 N$

حل آخر: يفضل اتباع الحل التالي

في قانون نيوتن الثاني $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ، القوى التي تسبب التسارع هي فقط القوى الخارجية المؤثرة على الجسم أما القوى الداخلية (مثل الشد T في هذا المثال) فتلغى بعضها بعضاً حسب قانون نيوتن الثالث. بالتالي، حتى نحسب التسارع نحتاج فقط الاهتمام بالقوى الخارجية. ففي هذا المثال، القوة الخارجية الوحيدة التي تسارع النظام هي \vec{F}_x ، وبتطبيق قانون نيوتن الثاني على النظام نجد:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= (\sum m)\vec{a} \quad (\text{لاحظ، عندما يحتوي النظام أكثر من كتلة نجمع على كل الكتل}) \\ F_x &= (m_1 + m_2) a \\ a &= \frac{F_x}{(m_1 + m_2)} = \frac{20}{(4.0 + 6.0)} = 2.0 m/s^2 \end{aligned}$$

أما الشد في الخيط، فيمكن أيجاده من رسمة "الجسم الحر" لأي من الصندوقين، كما فعلنا في الحل أعلاه.



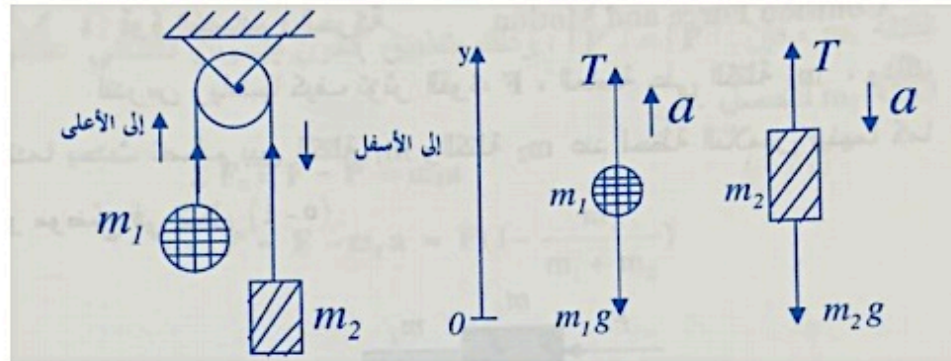
٤-٦-٣ حركة البكرة (آلة الاتوود)

يمثل هذا التطبيق مسألة هامة في فهم آلية تشغيل الآلات والرافعات الميكانيكية،
بتطبيق قانون نيوتن سنحصل على:

$$\Sigma F_y = T - m_1 g = m_1 a$$

$$\Sigma F_y = T - m_2 g = - m_2 a$$

أما مجموع القوى في اتجاه x فيساوي صفرًا لأن الحركة رأسية فقط.





يمكن حساب التسارع ومقدار الشد من المعادلتين السابقتين:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right) \mathbf{g}$$

$$\mathbf{T} = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{g}$$

حالات خاصة:

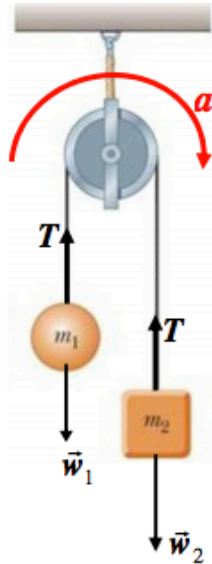
(١) إذا كانت $m_1 = m_2$ ، فإن $\mathbf{a} = 0$ ، وبالتالي: $\mathbf{T} = m_1 \mathbf{g} = m_2 \mathbf{g}$

(٢) إذا كانت $m_2 \gg m_1$ ، فإن $\mathbf{a} \cong \mathbf{g}$ ، وبالتالي: $\mathbf{T} \cong 2m_1 \mathbf{g}$

مثال: عندما تكون $m_1 = 2 \text{ kg}$ ، $m_2 = 4 \text{ kg}$ ، فإن:

$$\mathbf{T} = 26.1 \text{ N} \quad , \quad \mathbf{a} = 3.27 \text{ m/s}^2$$

مثال ٤-٢



شكل (5.9)

مثال 6: آلة أتود *The Atwood machine* اعتبر $m_1 = 2.00 \text{ kg}$ و $m_2 = 3.00 \text{ kg}$. أوجد ما يلي:

(أ) تسارع النظام. (ب) الشد في الخيط.

لاحظ ما يلي:

- بما أن $m_1 \neq m_2$ ، فإن إحدى الكتلتين تتحرك لأسفل بينما الأخرى لأعلى.
- بما أن الكتلتين متصلتان بحبل، يكون لهما نفس مقدار التسارع a .
- لدينا حبل واحد فقط، بالتالي تخضع الكتلتان لنفس الشد T .

الحل:

(أ) إعتبر حركة النظام عقارب الساعة كما يوضح الشكل (5.9). طبق قانون نيوتن الثاني على النظام، ولاحظ أن القوى الخارجية المؤثرة عليه هي فقط: \vec{w}_1 و \vec{w}_2 :

$$\sum \vec{F} = (\sum m) \vec{a}$$

$$w_2 - w_1 = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{w_2 - w_1}{(m_1 + m_2)} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g = \left(\frac{1.00 \text{ kg}}{5.00 \text{ kg}} \right) (9.80 \text{ m/s}^2) = 1.96 \text{ m/s}^2$$

(ب) الشد T : يمكن إيجاده من مخطط "الجسم الحر" لأي من الكتلتين m_1 أو m_2 :

$$T - w_1 = m_1 a \Rightarrow T = m_1 (g + a) = 2.00(9.80 + 1.96) = 23.5 \text{ N} \quad \text{من الجسم الحر للكتلة } m_1$$

$$w_2 - T = m_2 a \Rightarrow T = m_2 (g - a) = 3.00(9.80 - 1.96) = 23.5 \text{ N} \quad \text{من الجسم الحر للكتلة } m_2$$



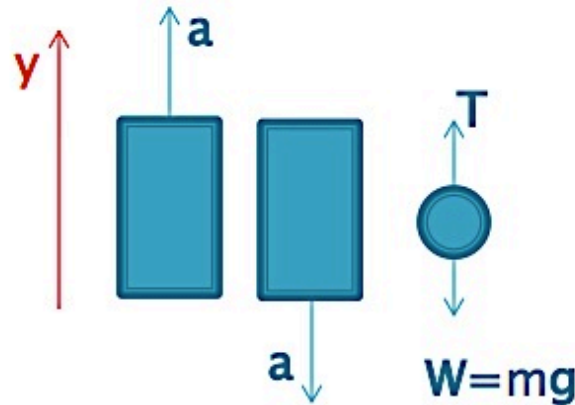
٤-٦-٥ المصعد الكهربائي

يوضح الشكل مخطط بيان الجسم الحر لحركة المصعد. بتطبيق قانون نيوتن الثاني في حالة الحركة لأعلى نحصل على:

$$\sum F_y = T - w = ma_y$$

أما في حالة الحركة لأسفل:

$$\sum F_y = T - w = -ma_y$$



$$T = w \pm ma_y = mg \pm ma = mg\left(1 \pm \frac{a}{g}\right)$$

$$T = w \left(1 \pm \frac{a}{g}\right) = w_{app}$$



$$T = w \left(1 \pm \frac{a}{g} \right) = w_{app}$$

ترمز (+) إلى أن حركة المصعد لأعلى (الوزن الظاهري < الوزن الحقيقي)
ترمز (-) إلى أن حركة المصعد لأسفل (الوزن الظاهري > الوزن الحقيقي)

مثال ١٢٣



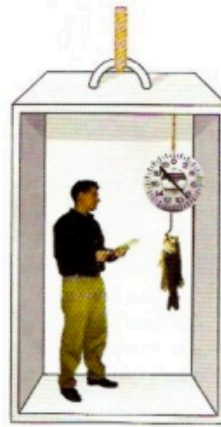
مثال 9 :

وزن سمكة في مصعد Weighing a Fish in an Elevator

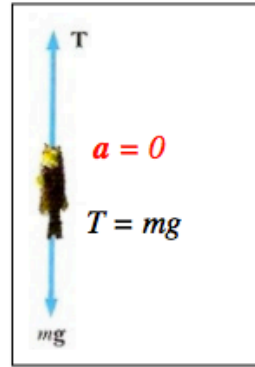
✚ عندما يكون المصعد ساكنا أو متحركا بسرعة ثابتة (أي $a = 0$) نعتبره "مرجع إسناد قصوري" تنطبق فيه قوانين نيوتن، وبالتالي يكون وزن السمكة هو: $F = mg$ ، كما يوضح شكل 5.13a أدناه.

✚ عندما يتسارع المصعد ($a \neq 0$) بالنسبة لراصد يقف خارجه، فإن المصعد يعتبر "مرجع إسناد غير قصوري" (أنظر مراجع الإسناد صفحة 3 أعلاه) وبالتالي يعتمد وزن السمكة (بالنسبة للراصد) على تسارع المصعد.

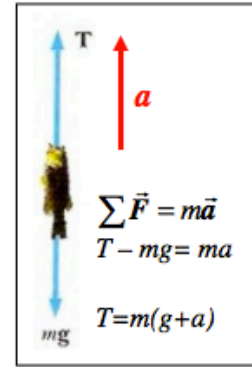
ونوضح هذا بالحالات الثلاث التالية:



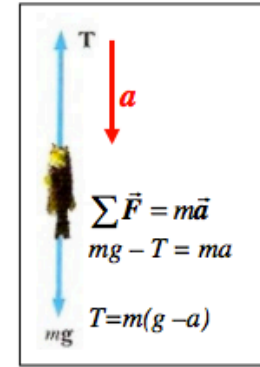
شكل (5.13)



شكل (5.13a)



شكل (5.13b)



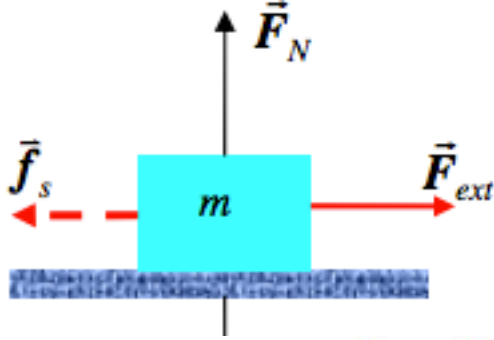
شكل (5.13c)

- عندما يكون المصعد ساكنا أو يتحرك بسرعة ثابتة (شكل 5.13a)، نحصل على الوزن الصحيح: $T = w = mg$
- عندما يتسارع لأعلى (شكل 5.13b)، يكون وزن السمكة "الظاهري" أكبر من وزنها الحقيقي (mg):

$$T = mg + ma = m(g + a)$$

- عندما يتسارع لأسفل (شكل 5.13c)، يصبح وزن السمكة "الظاهري" أقل من وزنها الحقيقي (mg):

$$T = mg - ma = m(g - a)$$



٧-٤ قوى الإحتكاك



قوة الاحتكاك: هي القوة التي تعاكس اتجاه حركة الجسم. ولها نوعان:

قوة الاحتكاك السكوني f_s : هي التي يظهر تأثيرها عند محاولة تحريك جسم ساكن.

$$\vec{f}_s = \mu_s \vec{N}$$

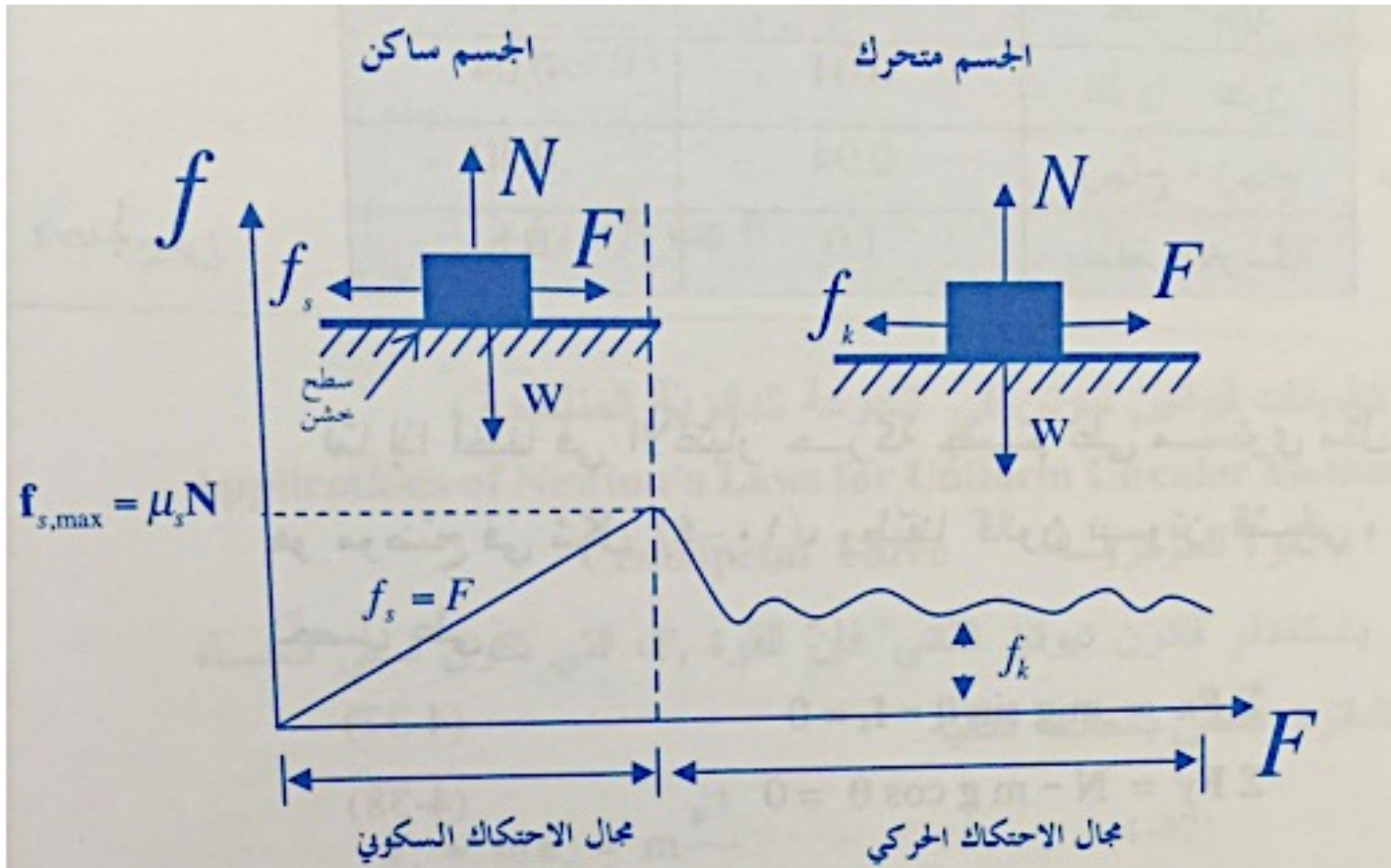
حيث μ_s : معامل الاحتكاك السكوني.

قوة الاحتكاك الحركي f_k : هي التي يظهر تأثيرها عندما يكون الجسم متحركاً.

$$\vec{f}_k = \mu_k \vec{N}$$

حيث μ_k : معامل الاحتكاك الحركي

ملاحظة: $\mu_k < \mu_s$ وتعتمد قيمة كل منهما على طبيعة المواد الصلبة التي تحتك ببعضها.



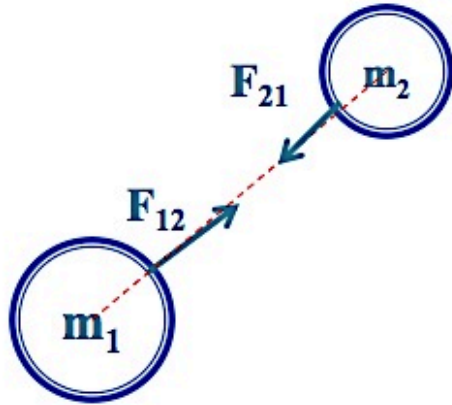
مثال ٤-٦ , ٤-٧ , ٤-٨



٤-١٠ قانون نيوتن للجاذبية الكونية

٤-١٠-١ مفاهيم أساسية

قانون نيوتن للجاذبية الكونية: كل جسم في الكون يجذب جسم آخر بقوة جاذبية تتناسب طرديا مع ناتج ضرب كتلتي الجسمين، وعكسيا مع مربع المسافة بينهما.



$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

حيث: G ثابت الجذب العام، ويساوي $6.672 \times 10^{11} \text{N.m}^2/\text{kg}^2$

قوة الجاذبية F_g بين الأرض وجسم موجود على سطحها:

$$F_g = G \frac{M_E m}{R_E^2}$$

حيث: M_E : كتلة الأرض، R_E : نصف قطرها

مثال ٤-١١



٤-١٠-٢ الوزن وقوة الجاذبية الأرضية

وزن جسم كتلته m هو قوة جذب الأرض له ويساوي mg وبالتالي يمكن كتابة قوة الجاذبية لهذا الجسم كالتالي:

$$mg = G \frac{M_E m}{R_E^2} \rightarrow g = G \frac{M_E}{R_E^2} \rightarrow M_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

- كيف يمكن حساب متوسط كثافة الأرض؟
- كيف يمكن حساب قوة الجاذبية المؤثرة على جسم على ارتفاع h من سطح الأرض؟
- إذا كان مقدار تسارع الجاذبية الأرضية عند ارتفاع h هو g' ، فاكتبي مقدار g' بدلالة h, M_E, R_E, G . ماذا تلاحظين؟



٤-١١ حل أمثلة صفحة ١٤٧

٤-١٢ مسائل صفحة ٤٧ (واجب)

2، 3، 4، 5، 7، 8، 11، 13، 15، 16

