المحاضرة 7- تابع للتقدير بمجالات الثقة.

2- 4- التقدير بمجال الثقة لنسبة المجتمع P

تكون فترة الثقة هي:

$$\widehat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{P}.\widehat{q}/_{n}} \leq P \leq \widehat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{P}.\widehat{q}/_{n}}$$

ملاحظة:

إذ كان السحب بدون إرجاع، بمعنى $\frac{n}{N} \geq 0,05$، يجب استعمال معامل التصحيح (معامل الإرجاع).

مثال (2- 13):

اخترنا عينة عشوائية مكونة من **800** مقهى في ولاية ميلة، فوجدنا **760** مقهى تمتلك أجهزة تلفاز ذكية (Plasma).

والمطلوب، قدّر نسبة المقاهي الذين يملكون أجهزة تلفاز ذكية في ولاية ميلة باستخدام مستوى ثقة 90%.

الحل:

من معطيات هذا المثال لدينا:

$$n = 800 \qquad \widehat{P} = \frac{760}{800} = 0.95 \qquad \alpha = 10\%$$

إذن:

$$\alpha = 10\% \Rightarrow Z_{0.05} = 1.64$$

بالتعويض في مجال الثقة:

$$\widehat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{P}.\widehat{q}/_{n}} \leq P \leq \widehat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{P}.\widehat{q}/_{n}}$$

نجد:

$$0,95 - 1,64\sqrt{\frac{(0,95).(0,05)}{800}} \leq P \leq 0,95 + 1,64\sqrt{\frac{(0,95).(0,05)}{800}}$$

$$0,95 - 1,64\sqrt{\frac{(0,95).(0,05)}{800}} \leq P \leq 0,95 + 1,64\sqrt{\frac{(0,95).(0,05)}{800}}$$

$$0,9374 \leq P \leq 0,9626$$

2- 5- التقدير بمجال ثقة للفرق بين نسبتين

وبالتالي مجال الثقة للفرق بين النسبتين $(\mathbf{P_1 - P_2})$ يكون مساو إلى:

$$(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\mathbf{P}}_1\widehat{\mathbf{q}}_1}{\mathbf{n_1}} + \frac{\widehat{\mathbf{P}}_2\widehat{\mathbf{q}}_2}{\mathbf{n_2}}} \leq \mathbf{P_1 - P_2} \leq (\widehat{P_1} - \widehat{P_2}) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\mathbf{P}}_1\widehat{\mathbf{q}}_1}{\mathbf{n_1}} + \frac{\widehat{\mathbf{P}}_2\widehat{\mathbf{q}}_2}{\mathbf{n_2}}}$$

إذ كان السحب بدون إرجاع، بمعنى $\frac{n_1}{N_1} \geq 0,05$ و $\frac{n_2}{N_2} \geq 0,05$ يجب استعمال معامل التصحيح (معامل الإرجاع).

مثال:

لمعالجة فيروس معين أصاب الدجاج، تم سحب عينتين من الدجاج المصاب به وطبّقت عليهم طريقتين **A** و**B** للمعالجة، حيث العينة الأولى طبّقت عليها الطريقة **A** والعينة الثانية طبقت عليها الطريقة **B**. فإذا كان حجم العينة الأولى **50** دجاجة مصابة، شفي منهم **36** دجاجة، وكان حجم العينة الثانية **60** دجاجة مصابة، شفي منها **33** دجاجة. المطلوب، عند مستوى معنوية **1%** أوجد مجال الثقة للفرق بين نسبتي الدجاج الذين تم شفاؤهم من هذا الفيروس.

الحل:

من معطيات هذا المثال لدينا:

$$n_1 = 50 \qquad \widehat{\mathbf{P}}_1 = \frac{36}{50} = 0,72 \qquad \alpha = 1\%$$

$$n_2 = 60 \qquad \widehat{\mathbf{P}}_2 = \frac{33}{60} = 0,55$$

وحيث أنّ:

$$\alpha = 1\% \Rightarrow Z_{0.005} = 2.58$$

ويكون مجال الثقة للفرق بين النسبتين $(\mathbf{P_1 - P_2})$ مساو إلى:

$$(\widehat{\mathbf{P}}_1 - \widehat{\mathbf{P}}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\mathbf{P}}_1\widehat{\mathbf{q}}_1}{\mathbf{n_1}} + \frac{\widehat{\mathbf{P}}_2\widehat{\mathbf{q}}_2}{\mathbf{n_2}}} \leq \mathbf{P_1 - P_2} \leq (\widehat{P_1} - \widehat{P_2}) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\mathbf{P}}_1\widehat{\mathbf{q}}_1}{\mathbf{n_1}} + \frac{\widehat{\mathbf{P}}_2\widehat{\mathbf{q}}_2}{\mathbf{n_2}}}$$

بالتعويض نجد:

$$0,17 - 2,58\sqrt{\frac{(0,72)(0,18)}{50} + \frac{(0,55)(0,45)}{60}} \leq \mathrm{P_1 - P_2} \leq 0,17 + 2,58\sqrt{\frac{(0,72)(0,18)}{50} + \frac{(0,55)(0,45)}{60}}$$

$$-0.0415 \leq \mathrm{P_1 - P_2} \leq 0.3815$$

2- 6- التقدير بمجال الثقة لتباين المجتمع σ^2

تكلمنا سابقا في توزيع المعاينة للتباين أنه إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وكان S^2 هو تباين العينة فإن $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ يخضع لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية $n-1$ أي $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$.

وعليه، نعرّف مجال الثقة لتباين المجتمع بأنه الفترة التي تحقق ما يلي:

$$P\left(\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\right) = 1-\alpha$$

بحل هذه المتباينة بالنسبة لـــ σ^2 نجد أن فترة الثقة للتباين كما يلي:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)}}$$

مثال:

من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا تم سحب عينة حجمها **20**، فوجدنا تباينها يساوي **16**، والمطلوب عند مستوى معنوية **5%** أوجد مجال الثقة لتباين المجتمع.

الحل:

من معطيات هذا المثال لدينا:

$$n = 20 \qquad S^2 = 16 \qquad \alpha = 5\%$$

من جدول توزيع مربع كاي نجد:

$$\chi^2_{(\frac{\alpha}{2},n-1)} = \chi^2_{0.025,19} = 32.85 \quad , \quad \chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)} = \chi^2_{0.975,19} = 8.91$$

بالتعويض في مجال الثقة نجد:

$$\frac{19 \times 16}{32.85} \leq \sigma^2 \leq \frac{19 \times 16}{8.91}$$

$$9.25 \leq \sigma^2 \leq 34.12$$

2- 7- التقدير بمجال ثقة للنسبة بين تبايني مجتمعين

تكمن أهمية إيجاد مجال الثقة للنسبة بين تبايني مجتمعين في التأكد من وجود تجانس بين المجتمعين من عدمه، فكلما كانت النسبة قريبة من 1 كان المجتمعان أكثر تجانسا (بالتقريب لهما نفس التباين). يعطى مجال الثقة للنسبة بين تبايني مجتمعين كمايلي:

$$\frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{1}{F\left(\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1\right)} \leq \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot F\left(\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right)$$

مثال :

من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا، تم سحب عينة عشوائية حجمها **25** بتباين يساوي **16**، وسحبت عينة أخرى حجمها **21** بتباين يساوي **12** من مجتمع آخر يتوزع أيضا توزيعا طبيعيا ومستقل عن المجتمع الأول. والمطلوب، أوجد مجال الثقة للنسبة بين تبايني المجتمعين وذلك عند مستوى معنوية تساوي **5%**.

الحل:

من معطيات هذا المثال لدينا:

$$\boldsymbol{n_1 = 25} \qquad \boldsymbol{S_1^2 = 16} \qquad \boldsymbol{n_2 = 21} \qquad \boldsymbol{S_2^2 = 12} \qquad \boldsymbol{\alpha = 5\%}$$

من جدول توزيع فيشر نجد:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{F\left(\frac{\alpha}{2}, n_2 - 1, n_1 - 1\right)}} = \frac{1}{F(0.025,20,24)} = \frac{1}{2.33} = \mathbf{0.4292}$$

$$\boldsymbol{F\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)} = F(0.025,24,20) = \mathbf{2.41}$$

بالتعويض في مجال الثقة نجد:

$$\frac{S_2^2}{S_1^2}.\frac{1}{F\left(\frac{\alpha}{2}, n_2 - 1, n_1 - 1\right)} \leq .\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{S_2^2}{S_1^2}.F\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$$

$$\frac{12}{16}.(0.4292) \leq .\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{12}{16}.(2.41)$$

$$0.3219 \leq .\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq 1.8075$$