المحاضرة 6:

ثانيا: التقدير بمجالات الثقة.

إذا حاولنا تقدير معلمة المجتمع محل الدراسة بقيمتين بحيث يمكن اعتبار أنّ المعلمة تقع بينهما فإننا نحصل على ما يسمى بالتقدير بمجال أو فترة ثقة لهذه المعلمة وذلك كما يلي:

$$\hat{\theta}_L \leq \hat{\theta} \leq \hat{\theta}_U$$

بحيث:

المجال $(\hat{\theta}_L \ , \ \hat{\theta}_U)$ يسمى بمجال الثقة أو فترة الثقة للمعلمة θ.

$\hat{\theta}_L$ و $\hat{\theta}_U$: هما على التوالي الحد الأدنى والحد الأعلى لفترة الثقة، ونعتمد في حسابهما على بيانات العينة، فنعتمد على الإحصائية المستخدمة كأفضل مقدر بالقيمة للمعلمة θ، وعلى توزيع المعاينة لهذا المقدر وعلى خطئه المعياري، وعلى حجم العينة، وعلى معامل الثقة المرغوب فيه $(1-\alpha)$.

وحيث أن معامل الثقة محصور بين الصفر والواحد، أي: $0 < 1-\alpha < 1$ فإن ذلك يعني:

$$P\left(\hat{\theta}_L \leq \hat{\theta} \leq \hat{\theta}_U\right) = 1-\alpha$$

وعند التعبير عن معامل الثقة $(1-\alpha)$ بنسب مئوية، أي $100\%\,(1-\alpha)$ يطلق على معامل الثقة في هذه الحالة بمستوى الثقة.

2-1- مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ

2-1-1- عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوما

يكون مجال الثقة للمتوسط هو:

$$P\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}\right) = 1-\alpha$$

أو بتعبير آخر نكتب:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}$$

- يسمى المقدار $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}$ بحد الخطأ ويرمز له عادة بالرمز ϵ .

- في الحالة التي يكون فيها السحب بدون إرجاع $(\frac{n}{N} \geq 0.05)$، ندخل معامل التصحيح $(\frac{N-n}{N-1})$ في حساب تباين العينة.
- إذا أردنا تعيين حجم العينة التي ينبغي أخذها بحيث لا يتجاوز الخطأ في تقديرنا لــ μ بــ $\bar{X}$ المقدار ϵ نقوم بحل المتباينة $\epsilon \geq Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sigma^2/n}$.

مثال:

من مجتمع طبيعي التوزيع تباينه يساوي **16**، تم سحب عينة عشوائية حجمها يساوي **64** ومتوسطها يساوي **10**.

والمطلوب عند مستوى معنوية تساوي **5%**، أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع.

الحل:

من معطيات المثال لدينا:

$$\sigma^2 = 16 \qquad n = 64 \qquad \bar{X} = 10 \qquad \alpha = 5\%$$

وبما أنّ حجم العينة $n = 64 > 30$ وتباين المجتمع الطبيعي معلوم فإننا سوف نستخدم التوزيع الطبيعي في إيجاد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

وحيث:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

ويكون مجال الثقة لــ μ هو:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sigma^2/n}$$

$$10 - 1.96 \sqrt{16/64} \leq \mu \leq 10 + 1.96 \sqrt{16/64}$$

$$10 - 0.98 \leq \mu \leq 10 + 0.98$$

$$9.02 \leq \mu \leq 10.98$$

ومنه باحتمال **95%** سوف يقع متوسط المجتمع μ بين القيمتين **9.02** و**10.98**.

2-1-2- عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهولا

- **إذا كان حجم العينة كبيرا** $(n \geq 30)$:

يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S^2/n}$$

- **إذا كان حجم العينة صغيرا** $(n < 30)$:

يكون مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي:

$$\bar{X} - t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\sqrt{S^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\sqrt{S^2/n}$$

مثال (2- 7):

من مجتمع طبيعي التوزيع بتباين مجهول، تم سحب عينة حجمها **49** بمتوسط يساوي **15** وتباين يساوي **25**. والمطلوب، عند مستوى معنوية تساوي **5%**، أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع.

الحل:

من معطيات المثال لدينا:

$\sigma^2 = ?$ $\quad n = 49$ $\quad \bar{X} = 15$ $\quad S^2 = 25$ $\quad \alpha = 5\%$

وحيث أنّ:

$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

ويكون مجال الثقة لـــ μ هو:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S^2/n}$$

$$15 - 1,96\sqrt{25/49} \leq \mu \leq 15 + 1,96\sqrt{25/49}$$

$$13.6 \leq \mu \leq 16.4$$

مثال (2- 8):

من مجتمع طبيعي التوزيع بتباين مجهول، تم سحب عينة حجمها **25** بمتوسط يساوي **20** وتباين يساوي **36**. والمطلوب، عند مستوى معنوية تساوي **5%**، أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع.

الحل:

من معطيات المثال لدينا:

$\sigma^2 = ?$ $\quad n = 25$ $\quad \bar{X} = 20$ $\quad S^2 = 36$ $\quad \alpha = 5\%$

وحيث أنّ:

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)} = t_{(0.025,24)=}2.064$$

ويكون مجال الثقة لـــ μ هو:

$$\bar{X} - t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\sqrt{s^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}\sqrt{s^2/n}$$

$$20 - 2.064\sqrt{36/25} \leq \mu \leq 20 + 2.064\sqrt{36/25}$$

$$17.5232 \leq \mu \leq 22.4768$$

2-2- التقدير بمجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

نميز بين حالتين:

2-2-1- عندما $\left(\sigma_2^2 \text{ و } \sigma_1^2 \text{ معلومين}\right)$

يكون مجال الثقة كما يلي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

مثال:

أردنا مقارنة متوسط كميات الإنتاج لشجيرات البرتقال في مزرعة **A** بكميات الإنتاج لشجيرات البرتقال في مزرعة **B**، ولهذا الغرض قمنا بسحب عينة عشوائية من شجيرات البرتقال من المزرعة **A** حجمها **25** شجيرة فكان متوسط كمية الإنتاج لها **55** كلغ، وسحبنا أيضا عينة عشوائية أخرى من المزرعة **B** مستقلة عن المزرعة الأولى حجمها **32** فكان متوسط كمية الإنتاج لها **48** كلغ. فإذا كانت كميات الإنتاج لجميع شجيرات البرتقال في المزرعة **A** تتبع التوزيع الطبيعي بتباين يساوي **16** كلغ، وكميات الإنتاج لجميع شجيرات البرتقال في المزرعة **B** تتبع التوزيع الطبيعي بتباين يساوي **9** كلغ، فأوجد مجال الثقة للفرق بين متوسطي كميات الإنتاج في المزرعتين عند مستوى ثقة **90%**.

الحل:

من معطيات المثال لدينا:

$\alpha = 10\%$ $\quad \sigma_A^2 = 16$ $\quad \bar{X}_A = 55$ $\quad n_A = 25$

$\sigma_B^2 = 9$ $\quad \bar{X}_B = 48$ $\quad n_B = 32$

يكون مجال الثقة لـــ $\mu_A - \mu_B$ هو:

$$(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} \leq (\mu_A - \mu_B) \leq (\bar{X}_A - \bar{X}_B) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

بالتعويض نجد:

$$7 - 1.64\sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{32}} \leq (\mu_A - \mu_B) \leq 7 + 1.64\sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{32}}$$

$$5.426 \leq (\mu_A - \mu_B) \leq 8.574$$

2-2-2- عندما يكون $\left(\sigma_2^2\right.$ و $\left.\sigma_1^2\right)$ مجهولين

نميز بين حالتين:

2-2-2-1- عندما يكون σ_2^2 و σ_1^2 مجهولين وغير متساويين

- **إذا كان $n_1, n_2 \geq 30$:** يكون مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين كالتالي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

- **إذا كان** $n_1, n_2 < 30$ **أو أحدهما صغير:** يكون مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين كالتالي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

حيث:

$$n = n_1 + n_2$$

2-2-2-2- عندما يكون σ_2^2 و σ_1^2 مجهولين و متساويين

يكون مجال الثقة للفرق بين المتوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ في هذه الحالة هو:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}, \vartheta}\sqrt{S_P^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}, \vartheta}\sqrt{S_P^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

2-3- التقدير بمجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مرتبطين

نميز بين حالتين:

- **في حالة** $n \geq 30$:

تكون: $Z = \frac{\bar{D}-\mu_D}{\sqrt{S_D^2/n}}$ وبالتالي مجال الثقة هو:

$$\bar{D} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_D^2/n} \leq \mu_D \leq \bar{D} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S_D^2/n}$$

- **في حالة** $n < 30$:

يكون:

$$T = \frac{\bar{D}-\mu_D}{\sqrt{S_D^2/n}} \sim t(n-1)$$

ويكون مجال الثقة لمتوسط مجتمع الفروق هو:

$$\bar{D} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{S_D^2/n} \leq \mu_D \leq \bar{D} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\sqrt{S_D^2/n}$$