Centre universitaire Abdelhafid Boussouf -Mila
Institut de Sciences et Technologies
Département de mathématiques et informatique
$3^{\text{ième}}$ Année mathématiques Appliquées

Matière: Simulation et pratique de logiciels

Chapitre 1 et 2: Génération d'échantillon suivant différentes lois de probabilités

Présentée par:
AZI Mourad

April 22, 2024

Plan de cours

Introduction

Plan de cours

Introduction

La génération des nombres aléatoires (au hasard) et les tables

Plan de cours

Plan de cours

Introduction

La simulation est un outil utilisé pour imiter le comportement d'un système réel ou hypothétique. Elle est utilisée pour modéliser des phénomènes complexes ou incertains dans divers domaines, la science, l'ingénierie, l'informatique, l'économie, la biologie, et bien d'autres. Elle permet aux chercheurs et aux développeurs de mieux comprendre et prédire le comportement de systèmes réels ou abstraits, de prévoir des scénarios et d'analyser des résultats sans avoir à expérimenter directement sur le système réel.

La simulation à pour objectifs:

- la compréhension du Système : Les simulations aident à comprendre le comportement d'un système complexe;

Introduction

La simulation est un outil utilisé pour imiter le comportement d'un système réel ou hypothétique. Elle est utilisée pour modéliser des phénomènes complexes ou incertains dans divers domaines, la science, l'ingénierie, l'informatique, l'économie, la biologie, et bien d'autres. Elle permet aux chercheurs et aux développeurs de mieux comprendre et prédire le comportement de systèmes réels ou abstraits, de prévoir des scénarios et d'analyser des résultats sans avoir à expérimenter directement sur le système réel.
La simulation à pour objectifs:

- la compréhension du Système : Les simulations aident à comprendre le comportement d'un système complexe;
- la prédiction et Prévision : Les simulations permettent de prédire le comportement futur d'un système en modifiant ses paramètres et en observant les résultats;

Introduction

La simulation est un outil utilisé pour imiter le comportement d'un système réel ou hypothétique. Elle est utilisée pour modéliser des phénomènes complexes ou incertains dans divers domaines, la science, l'ingénierie, l'informatique, l'économie, la biologie, et bien d'autres. Elle permet aux chercheurs et aux développeurs de mieux comprendre et prédire le comportement de systèmes réels ou abstraits, de prévoir des scénarios et d'analyser des résultats sans avoir à expérimenter directement sur le système réel.

La simulation à pour objectifs:

- la compréhension du Système : Les simulations aident à comprendre le comportement d'un système complexe;
- la prédiction et Prévision : Les simulations permettent de prédire le comportement futur d'un système en modifiant ses paramètres et en observant les résultats;
- la formation et Enseignement : Les simulations sont utilisées pour former des individus dans des domaines tels que la médecine, l'aviation, et l'ingénierie en leur permettant d'expérimenter des scénarios virtuels.

Introduction

La simulation est un outil utilisé pour imiter le comportement d'un système réel ou hypothétique. Elle est utilisée pour modéliser des phénomènes complexes ou incertains dans divers domaines, la science, l'ingénierie, l'informatique, l'économie, la biologie, et bien d'autres. Elle permet aux chercheurs et aux développeurs de mieux comprendre et prédire le comportement de systèmes réels ou abstraits, de prévoir des scénarios et d'analyser des résultats sans avoir à expérimenter directement sur le système réel.
La simulation à pour objectifs:

- la compréhension du Système : Les simulations aident à comprendre le comportement d'un système complexe;
- la prédiction et Prévision : Les simulations permettent de prédire le comportement futur d'un système en modifiant ses paramètres et en observant les résultats;
- la formation et Enseignement : Les simulations sont utilisées pour former des individus dans des domaines tels que la médecine, l'aviation, et l'ingénierie en leur permettant d'expérimenter des scénarios virtuels.
- la réduction des Risques : Les simulations permettent de tester des scénarios sans risquer des vies ou des ressources.

Introduction

La simulation est un outil utilisé pour imiter le comportement d'un système réel ou hypothétique. Elle est utilisée pour modéliser des phénomènes complexes ou incertains dans divers domaines, la science, l'ingénierie, l'informatique, l'économie, la biologie, et bien d'autres. Elle permet aux chercheurs et aux développeurs de mieux comprendre et prédire le comportement de systèmes réels ou abstraits, de prévoir des scénarios et d'analyser des résultats sans avoir à expérimenter directement sur le système réel.

La simulation à pour objectifs:

- la compréhension du Système : Les simulations aident à comprendre le comportement d'un système complexe;
- la prédiction et Prévision : Les simulations permettent de prédire le comportement futur d'un système en modifiant ses paramètres et en observant les résultats;
- la formation et Enseignement : Les simulations sont utilisées pour former des individus dans des domaines tels que la médecine, l'aviation, et l'ingénierie en leur permettant d'expérimenter des scénarios virtuels.
- la réduction des Risques : Les simulations permettent de tester des scénarios sans risquer des vies ou des ressources.

La génération des nombres aléatoires

Avant l'ère de l'informatique, les méthodes pour obtenir des nombres aléatoires étaient principalement basées sur des processus physiques ou des phénomènes naturels.

Par exemple, le lancer de dés, le tirage au sort de billes ou de cartes, ainsi que l'utilisation de roues de loterie étaient des moyens courants de générer des nombres aléatoires dans les jeux de hasard et les tirages au sort.

La génération des nombres aléatoires

Avant l'ère de l'informatique, les méthodes pour obtenir des nombres aléatoires étaient principalement basées sur des processus physiques ou des phénomènes naturels.

Par exemple, le lancer de dés, le tirage au sort de billes ou de cartes, ainsi que l'utilisation de roues de loterie étaient des moyens courants de générer des nombres aléatoires dans les jeux de hasard et les tirages au sort.

Avec ces tirage on construit les tables de nombres aléatoires qui sont des listes prédéfinies de nombres utilisées pour introduire de l'aléatoire dans les simulations et les calculs.

Cependant, Les séquences générées à partir de ces tables étaient finies et prévisibles, ce qui les rendait inadaptées à de nombreuses applications qui nécessitaient des séquences aléatoires plus longues et plus variées.

La génération des nombres pseudo-aléatoires

La génération des nombres pseudo-aléatoires

Avec l’évolution de la technologie informatique, des générateurs de nombres aléatoires plus sophistiqués ont été développés. Tels que le bruit thermique ou quantique, offrant une véritable aléatoire. Cependant, la plupart des applications utilisent encore des générateurs pseudo-aléatoires en raison de leur efficacité et de leur praticité.

Générateur pseudo-aléatoires

Les générateurs pseudo-aléatoires sont des algorithmes utilisés pour construire une suite de nombres qui semblent être aléatoires, mais qui est en fait produite par un procédé déterministe, c’est-à-dire qu’ils sont générés à partir d’une valeur de départ appelée "graine" et suivent un schéma prédéfini.

Plan de cours

Générateurs congruentiels linéaire simple

Les méthodes les plus courantes pour générer des séquences pseudo-aléatoires utilisent les générateurs dits congruentiels linéaires, introduite en 1948 par D. H. Lehmer, elle reposent sur une simple formule de récurrence :

$$X_{n+1} = (a * X_n + c) \mod m \tag{1}$$

Générateurs congruentiels

Générateurs congruentiels linéaire simple

Les méthodes les plus courantes pour générer des séquences pseudo-aléatoires utilisent les générateurs dits congruentiels linéaires, introduite en 1948 par D. H. Lehmer, elle reposent sur une simple formule de récurrence :

$$X_{n+1} = (a * X_n + c) \mod m \tag{1}$$

avec X_0 la graine, m le module, a est le multiplicateur et c l'incrément.

Générateurs congruentiels linéaire simple

Les méthodes les plus courantes pour générer des séquences pseudo-aléatoires utilisent les générateurs dits congruentiels linéaires, introduite en 1948 par D. H. Lehmer, elle reposent sur une simple formule de récurrence :

$$X_{n+1} = (a * X_n + c) \mod m \tag{1}$$

avec X_0 la graine, m le module, a est le multiplicateur et c l'incrément.
Les entiers X_n générés prennent des valeurs de 0 à $m-1$.
Pour calculer le nombre uniforme pseudo-aléatoire u_n, pris comme une approximation de la valeur d'une variable aléatoire uniforme $\mathcal{U}(0,1)$, nous utilisons la formule :

$$u_n = \frac{x_n}{m}$$

Exemple:
Calculez les neuf premières valeurs de x_i et u_i.
$a = 5, c = 1, m = 8, x_0 = 5;$
$a = 137, c = 187, m = 2^8;$
a = 25, c = 16, m = 256.

Récurrences linéaires multiples

Elle est définie par la relation

$$X_i = (\sum_{j=1}^{k} a_j * X_{i-j} + c) \mod m \tag{2}$$

Plan de cours

La méthode de Von Neumann

La méthode de Von Neumann(middle-square)

En 1946, John von Neumann propose un générateur pseudo-aléatoire connu sous le nom de la méthode middle-square (carré médian). Très simple, elle consiste à prendre un nombre, à l'élever au carré et à prendre les chiffres au milieu comme sortie. Celle-ci est utilisée comme graine pour l'itération suivante.

- Soit le nombre « 1111 ».

La méthode de Von Neumann

La méthode de Von Neumann(middle-square)

En 1946, John von Neumann propose un générateur pseudo-aléatoire connu sous le nom de la méthode middle-square (carré médian). Très simple, elle consiste à prendre un nombre, à l'élever au carré et à prendre les chiffres au milieu comme sortie. Celle-ci est utilisée comme graine pour l'itération suivante.

- Soit le nombre « 1111 ».
- $1111^2 = 1234321$, on prend les chiffres du milieu : 3432;

La méthode de Von Neumann(middle-square)

En 1946, John von Neumann propose un générateur pseudo-aléatoire connu sous le nom de la méthode middle-square (carré médian). Très simple, elle consiste à prendre un nombre, à l'élever au carré et à prendre les chiffres au milieu comme sortie. Celle-ci est utilisée comme graine pour l'itération suivante.

- Soit le nombre « 1111 ».
- 1111^2 = 1234321, on prend les chiffres du milieu : 3432;
- 3432^2= 11778624, on recupère le chiffre 7786 et ainsi de suite.

Plan de cours

Méthode de Fibonacci

Cette méthode est basée sur la suite de Fibonacci modulo la valeur maximale désirée M:

$$x_n = (x_{n-1} + x_{n-2}) \mod M \tag{3}$$

avec x_0 et x_1 en entrée.

Plan de cours

La méthode de l'inverse (Distribution continue)

La méthode de l'inverse est une technique utilisée pour générer des échantillons aléatoires qui suivent une distribution de probabilité donnée.

On suppose que l'on sait générer des nombres pseudo-aléatoires de loi $\mathcal{U}(0,1)$. Soit X une variable aléatoire de densité f connue. On cherche une méthode de tirage de nombres aléatoires répartis selon la loi de X. Ces nombres forment un échantillon de la loi de X. Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X vérifiant,

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{4}$$

La méthode de l'inverse (Distribution continue)

Théorème 1.1 (Théorème de la transformation inverse)

Soit X une variable aléatoire et $F(x)$ sa fonction de répartition. Si $F(x)$ est continue et strictement croissante, alors $Y = F(X)$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(0, 1)$. Autrement dit, si U est une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(0, 1)$, la variable $F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire dont F est sa fonction de répartition.

Théorème 1.1 (Théorème de la transformation inverse)

Soit X une variable aléatoire et $F(x)$ sa fonction de répartition. Si $F(x)$ est continue et strictement croissante, alors $Y = F(X)$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(0, 1)$. Autrement dit, si U est une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(0, 1)$, la variable $F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire dont F est sa fonction de répartition.

La méthode de l'inverse (Distribution continue)

Une application directe de ce théorème permet, à partir d'une loi uniforme, de générer n'importe quelle autre loi.

Théorème 1.1 (Théorème de la transformation inverse)

Soit X une variable aléatoire et $F(x)$ sa fonction de répartition. Si $F(x)$ est continue et strictement croissante, alors $Y = F(X)$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(0, 1)$. Autrement dit, si U est une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(0, 1)$, la variable $F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire dont F est sa fonction de répartition.

La méthode de l'inverse (Distribution continue)

Une application directe de ce théorème permet, à partir d'une loi uniforme, de générer n'importe quelle autre loi.
Pour générer un échantillon issu d'une variable aléatoire X, il faut connaître $F(x)$ et avoir une suite de nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n$ issus d'une variable U de loi $\mathcal{U}(0, 1)$.
La relation $x = F^{-1}(u)$ permet d'obtenir l'échantillon:

$$x_1 = F^{-1}(u_1), \;\; x_2 = F^{-1}(u_2), \;\; \ldots \; x_n = F^{-1}(u_n) \tag{5}$$

issu d'une population distribuée selon F.

Algorithme de la méthode de l'inverse (Distribution continue)

1. Générer u $\sim \mathcal{U}(0,1)$;
2. $x = F^{-1}(u)$;
3. Renvoyer(x);

Exemple 1.1 (Loi exponentielle - $Exp(\lambda)$)

La densité de probabilité de la distribution exponentielle de paramètre λ prend la forme:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & si \;\; x \geq 0, \\ 0, & si \;\; x < 0. \end{cases} \tag{6}$$

La fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & si \;\; x \geq 0, \\ 0, & si \;\; x < 0. \end{cases} \tag{7}$$

La méthode de l'inverse (Distribution Discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète avec $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, ...,$ vérifiant $\sum_i p_i = 1$ et $x1 < x2 < ....$ La fonction de distribution cumulative F de X est donnée par $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$, i = 1, 2, ... et est illustrée dans la figure suivante :

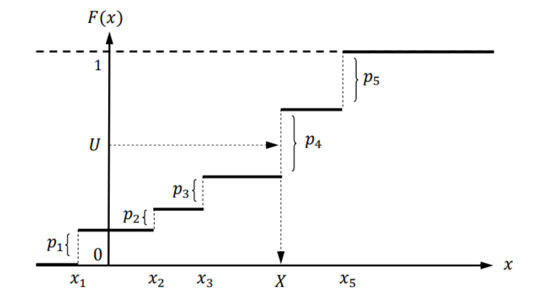


Figure: Distribution discète

La méthode de l'inverse (Distribution Discrète)

Sa fonction de répartition s'écrit:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & si \ \ x < x_1, \\ p_1, & si \ \ x_1 \leq x < x_2, \\ p_1 + p_2, & si \ \ x_2 \leq x < x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & si \ \ x_3 \leq x < x_4, \\ \vdots & \\ 1, & si \ \ x \geq x_n. \end{cases} \tag{8}$$

La méthode de l'inverse (Distribution Discrète)

Sa fonction de répartition s'écrit:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & si \;\; x < x_1, \\ p_1, & si \;\; x_1 \leq x < x_2, \\ p_1 + p_2, & si \;\; x_2 \leq x < x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & si \;\; x_3 \leq x < x_4, \\ \vdots & \\ 1, & si \;\; x \geq x_n. \end{cases} \quad (8)$$

La fonction inverse $F^1(u) = \min\{x_k : F(x_k) \geq u\}, 0 \leq u \leq 1$:

$$F^1(u) = \begin{cases} x_1, & si \;\; 0 \leq u < p_1, \\ x_2, & si \;\; p_1 \leq u < p_1 + p_2, \\ x_3, & si \;\; p_1 + p_2 \leq u < p_1 + p_2 + p_3, \\ x_4, & si \;\; p_1 + p_2 + p_3 \leq u < p_1 + p_2 + p_3 + p_4, \\ \vdots & \\ x_n, & si \;\; p_1 + p_2 \ldots p_{n-1} \leq u \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Algorithme de la méthode de l'inverse (Distribution Discrète)

1. Générer $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$;
2. Trouvez le plus petit nombre entier positif k, tel que $u \leq F(x_k)$;
3. Renvoyer(x_k);

Exemple (Distribution Discrète)

Écrit un algorithme et un programme python pour générer une variable aléatoire selon une loi de probabilité résumé dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
n_i	10	20	30	30	10
p_i	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

La méthode de l'inverse (Distribution Discrète)

Exemple (Distribution Discrète)

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & si \;\; x < 1, \\ 0.1, & si \;\; 1 \leq x < 2, \\ 0.3, & si \;\; 2 \leq x < 3, \\ 0.6, & si \;\; 3 \leq x < 4, \\ 0.9, & si \;\; 4 \leq x < 5, \\ 1, & si \;\; x \geq 5. \end{cases} \tag{10}$$

Exemple (Fonction inverse)

$$F^{1}(u) = \begin{cases} 1, & si \;\; 0 \leq u < 0.1, \\ 2, & si \;\; 0.1 \leq u < 0.3, \\ 3, & si \;\; 0.3 \leq u < 0.6, \\ 4, & si \;\; 0.6 \leq u < 0.9, \\ 5, & si \;\; 0.9 \leq u \leq 1. \end{cases} \tag{11}$$

La méthode de l'inverse (Distribution Discrète)

Algorithme

Générer u $\sim \mathcal{U}(0,1)$;

Si u 0.1 Alors

x=1;

Sinon Si u$\leq$ 0.3*Alors*

x=2;

Sinon Si u$\leq$ 0.6*Alors*

x=3;

Sinon Si u$\leq$ 0.9*Alors*

x=4;

Sinon x=5;

Finsi

Finsi

Finsi

Finsi

Renvoyer(x);

Plan de cours

La méthode de rejet

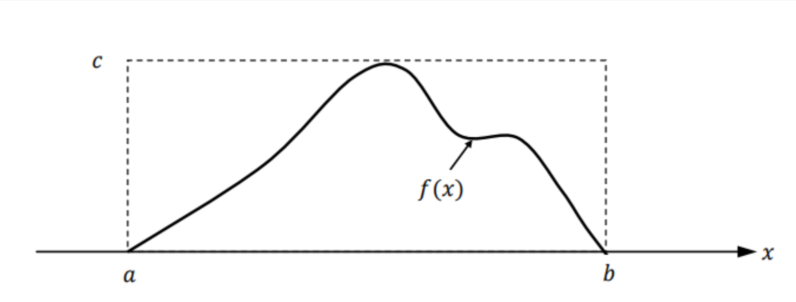
Il existe beaucoup de distributions pour lesquelles ni la méthode de transformation inverse, ni des transformations plus générales ne peuvent produire des variables aléatoires de ces distributions. Pour ces cas, nous devons nous tourner vers des méthodes indirectes, c'est-à-dire vers des méthodes pour lesquelles nous générons tout d'abord une variable aléatoire candidate qui est alors soumise à un test.

La méthode de rejet

Il existe beaucoup de distributions pour lesquelles ni la méthode de transformation inverse, ni des transformations plus générales ne peuvent produire des variables aléatoires de ces distributions. Pour ces cas, nous devons nous tourner vers des méthodes indirectes, c'est-à-dire vers des méthodes pour lesquelles nous générons tout d'abord une variable aléatoire candidate qui est alors soumise à un test.
La méthode de Rejet est une méthode indirecte due à Stan Ulam et John von Neumann. Elle peut être appliquée lorsque la méthode de transformation inverse échoue

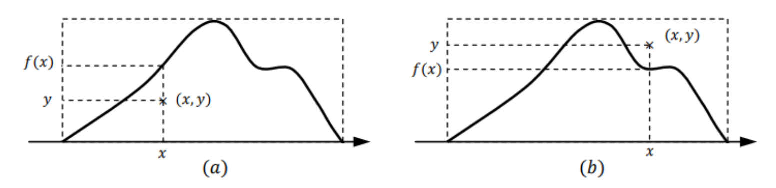
Méthode de Rejet, pour les densités à support compact

Cette méthode de simulation d'échantillons s'applique aux variables aléatoires continues X non nulles sur un intervalle de R. Pour introduire l'idée, supposons que la fonction de densité de probabilité cible f (à partir de laquelle nous voulons échantillonner) est délimitée sur un intervalle fini $[a, b]$ (compact) et est nul en dehors de cet intervalle.
Soit, $c = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.



Méthode de Rejet, pour les densités à support compact

Considérons le rectangle $R = [a, b] \times [0, c]$ et tirons un point (x, y) de manière uniforme dans le rectangle R. Cela peut se faire de la manière suivante, On tire un nombre x uniformément réparti entre a et b (i.e. $x \sim \mathcal{U}(a, b)$)), ensuite un nombre y uniformément réparti entre 0 et c (i.e. $y \sim \mathcal{U}(0, c)$). Les points situés au-dessous de f (x) sont acceptés et ceux situés au-dessus de f (x) sont rejetés



Algorithme

1. Générer x $\sim \mathcal{U}(a, b)$;
2. Générer y $\sim \mathcal{U}(0, c)$;
3. Si $y \leq f(x)$ Alors

   Renvoyer (x);

   Sinon ;

   Aller à l'étape 1.

Finsi.

Méthode de Rejet-Acceptation, pour les densités à support quelconque

Méthode de Rejet-Acceptation, pour les densités à support quelconque

Le principe de la méthode de Rejet-Acceptation peut se généraliser, en remplaçant le rectangle par une surface délimitée par le graphe d'une fonction non négative opportunément choisie.
Il est préférable d'utiliser une courbe enveloppante $g(x)$ de forme semblable à $f(x)$, l'efficacité exige que g soit aussi proche que possible de f afin d'éviter de gaspiller les simulations. À cause de la contrainte $f(x) \leq g(x)$ Nous avons

$$\int g(x) = M > 1. \tag{12}$$

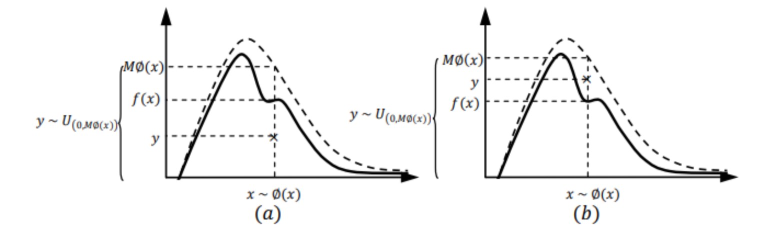
Définissons à partir de g une densité de probabilité ϕ telle que:

$$\phi(x) = \frac{g(x)}{x}. \tag{13}$$

$\phi(x)$ est appelée densité instrumentale ou candidate, et supposons quelle est facile à simuler.

Méthode de Rejet-Acceptation, pour les densités à support quelconque

Choisissons un point (x, y) de manière uniforme dans la surface entre le graphe de la fonction $g(x)$ et l'axe des x. Cela peut se faire de la manière suivante, On tire un nombre x suivant la densité instrumentale $\phi(x)$ que nous avons supposé facile à simuler, puis un nombre y uniformément réparti entre 0 et $g(x)$ (i.e. $M\phi(x)$). Les points situés au-dessous de $f(x)$ sont acceptés et ceux situés au-dessus de $f(x)$ sont rejetés.



ALgorithme Méthode de Rejet-Acceptation, pour les densités à support quelconque

1. Générer x $\sim \phi$;
2. Générer y $\sim \mathcal{U}(0, M\phi(x))$;
3. Si $y \leq f(x)$ Alors

   Renvoyer (x);

   Sinon ;

   Aller à l'étape 1.

   Finsi.

ALgorithme Méthode de Rejet-Acceptation, pour les densités à support quelconque

Générer x $\sim \phi$;
Générer y $\sim \mathcal{U}(0, 1)$;
Tant que $u > f(x)/M\phi(x)$ Faire
Générer x $\sim \phi$;
Générer y $\sim \mathcal{U}(0, 1)$;
Fin tant que
Renvoyer(x);

Plan de cours

La méthode de composition

Cette méthode consiste à remplacer $f(x)$ par un mélange probabiliste de fonction de densités $f_i(x)$ judicieusement choisies.
La fonction de répartition $F(x)$ peut parfois être exprimée comme une combinaison convexe de n fonctions de répartitions F_i, c'est-à-dire :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(x) \;\; o \;\; pi > 0, \;\; \sum_{i=1}^{n} pi = 1. \qquad (14)$$

La méthode de composition

Algorithme de la méthode de composition

Générer u $\sim \mathcal{U}(0, 1)$;
Si $u \leq p_1$ Alors
Générer $x \sim F_1(x)$;
    Sinon, Si $u \leq p_1 + P_2$ Alors
    Générer $x \sim F_2(x)$;
        Sinon, si $u \leq p_1 + p_2 + p_3$ Alors
        Générer $x \sim F_3(x)$;

$$\vdots$$

            Sinon
            Finsi
        Finsi
    Finsi
Renvoyer(x);

La méthode de composition

Exemple

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f (x) telle que :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x & si \;\; 0 \leq x \leq 1, \\ f_1(x) = 2 - x & si \;\; 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{15}$$