Centre Universitaire de Mila
Première Année LMD Informatique 2023-2024
Matière : *Algèbre 2*

Série 4

Exercice n°1 :Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espaces vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On considère deux parties F_1 et F_2 de E définies par

$$\begin{aligned} F_1 &= \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) :^t A = A\right\} \text{ (Matrices symétriques)} \\ F_2 &= \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) :^t A = -A\right\} \text{ (Matrices antisymétriques).} \end{aligned}$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $B_1 = \frac{1}{2}(A +^t A) \in F_1$ et que $B_2 = \frac{1}{2}(A -^t A) \in F_2$.
3. Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, décomposer A en une somme d'une matrice de F_1 et d'une matrice de F_2.

Exercice n°2 : On considère dans $M_2(\mathbb{R})$ la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.

Exercice n°3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer A^2, A^3 et en déduire, pour tout entier $n \geq 3$, la valeur de A^n.
2. A tout nombre réel x on associe la matrice $M(x) = I_3 + xA + \frac{x^2}{2}A^2$.
   (a) Ecrire la matrice $M(x)$.
   (b) Montrer que pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}$, on a $M(x).M(y) = M(x+y)$.
   (c) En déduire que, pour tout réel x, la matrice $M(x)$ est inversible. Déterminer son inverse $[M(x)]^{-1}$.

Exercice n°4 : Soit $E = M_2(\mathbb{R}) = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ l'espaces vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base B de $M_2(\mathbb{R})$.
2. On considère une application $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ définie par $\forall A \in M_2(\mathbb{R}) : f(A) = M.A$
   (a) Montrer que f est linéaire et déterminer $D = \underset{B}{Mat}(f)$ la matrice associée à f relativement à la base B.

Exercice n°5 : Soit $B = \{P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2\}$ la base canonique de

$$\mathbb{R}_2[X] = \left\{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

On considère une application linéaire f définie par

$$\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & f(P) = (2 + X + X^2)\,P - (1 + 2X + X^2 + X^3)\,P' + \frac{1}{2}\left(-1 + X + X^2 + X^3 + X^4\right)P'' \end{array}$$

1. Déterminer la matrice A associée à f relativement à la base B.
2. Soit $B' = \{Q_1 = 1 + X + X^2, Q_2 = X + 1, Q_3 = 2 + X + X^2\}$ une nouvelle base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(a) Déterminer la matrice de passage D de B à B' et calculer la matrice D^{-1}.

3. Soit $P = 1 - 2X - X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Trouver les coordonnées de P dans la base B'.

(a) Déterminer la matrice A' associée à f par rapport à la base B'.

Exercice 06 :Supplémentaire. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. $B = \{P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2\}$ sa base canonique.

1. Soit f une application définie par

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & f(P) = P' - (X+1)P'' \end{array}$$

(a) Montrer que f est une application linéaire.

(b) Déterminer $Ker(f)$, $\Im(f)$ et donner $\dim_{IR}(Ker(f))$, $\dim_{IR}(\Im(f))$. L'application f est elle injective ? surjective ?

(c) Déterminer la matrice A associée à f relativement B.

(d) Donner la matrice de passage H de B à $B' = \{Q_0 = X - 1, Q_1 = X^2 - 1, Q_2 = X^2 + 1\}$ et trouver H^{-1}.

(e) Déterminer les coordonnées de $P = 1 + X + X^2$ dans la base B'.

Exercice 07 :(Supplémentaire) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'endomorphisme f_a $(a \in \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_a(x, y, z) = (x + ay + a^2 z, y + 2az, z)$$

1. Donner $M_a = \underset{B}{Mat}(f_a)$.
2. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R} : M_a.M_b = M_{a+b}$. En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a est inversible et déterminer M_a^{-1}.
3. Calculer $M_a^n, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 08 :(Supplémentaire) Sur IR^3 muni de sa base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, on considère l'endomorphisme f_a $(a \in \mathbb{R})$ défini par $f_a(e_i) = \sum_{j \neq i} e_j + a.e_i, i \in \{1, 2, 3\}$.

1. Déterminer $M_a = \underset{B}{Mat}(f_a)$ et Donner l'expression analytique de f_a relativement à la base B.
2. Pour quelles valeurs de a, l'application a f_a est-elle bijective ?