Dynamique des fluides incompressibles parfaits

1. Méthode de description d'un écoulement

Il existe deux méthodes pour étudier un écoulement fluide. Prenons l'exemple de l'écoulement de la fumée sortant d'une cheminée (Fig. 1). La première méthode consiste à prendre une même particule "A" de la fumée et la suivre là où elle va et mesurer à chaque instant sa température par exemple, cette méthode s'appelle la méthode de Lagrange. L'autre méthode consiste à fixer un point "0" dans l'espace et mesurer à chaque instant les températures des particules qui passent par ce point. Cette méthode est appelée la méthode d'Euler. Dans ce cas et pour une seule position fixe (x_0, y_0, z_0) on aura une succession de températures T_{01},T_{02},T_{03}... mesurées aux temps: t_1,t_2,t_3..., cette dernier méthode est la plus commune et la plus efficace dans la plupart des cas.

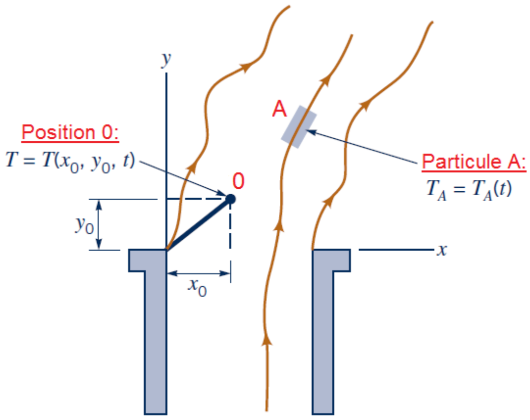

Figure 1. Description Lagrangienne et Eulérienne de l'écoulement de la fumée sortant d'une cheminée

2. Écoulement permanent et non permanent

Si en chaque point de l'espace l'écoulement (vitesse, pression, masse volumique...etc) est indépendant du temps, il est alors appelé permanent (ou stationnaire). S'il varie avec le temps en un point, l'écoulement est dit non permanent (ou instationnaire).

3. Conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse est l'un des principes les plus fondamentaux dans la nature. Pour les systèmes fermés, la conservation de la masse implique que la masse du système reste constante lors d'un processus. Cependant pour un système ouvert la masse peut traverser ses frontières, en conséquence on doit savoir la quantité de masse entrante et sortante du système.

4. Débit volumique

On appelle débit volumique en un point, le volume de fluide passant en ce point par seconde. Si pendant un temps Δt il passe un volume ΔV alors le débit volumique Q en m^3/s est donné par:

$$Q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

5. Débit massique

On appelle débit massique en un point, la masse de fluide passant en ce point par seconde. Si pendant un temps Δt il passe une masse Δm alors le débit massique Q_m où $\dot{m}$ en kg/s est donné par:

$$Q_m = \dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Le débit massique dans une conduite où circule un fluide (Fig. 1) est calculé par la relation suivante :

$$Q_m = \dot{m} = \rho . S . v$$

et le débit volumique par:

$$Q_V = S . v$$

Avec :

S : Section de la conduite en m^2.

ρ : Masse volumique du fluide en kg/m^3.

v : Vitesse moyenne du fluide en m/s.

La conservation de masse implique que le débit massique à la section "A" doit être égale au débit massique à la section "B", ce qui veut dire que :

$$\dot{m}_A = \dot{m}_B \quad \Leftrightarrow \quad \rho_A . S_A . v_A = \rho_B . S_B . v_B$$

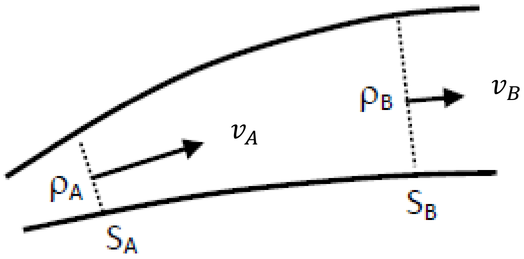

Figure 2. Écoulement dans une conduite.

6. Principe de conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse dans un système donné peut être exprimé comme suit : le transfert de masse net qui entre ou sort dans un système pendant un intervalle de temps Δt est égale à la variation nette (augmentation ou diminution) de la masse totale au sein du système pendant Δt . Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \text{Débit massique entrant} \\ \text{dans le système} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Débit massique sortant} \\ \text{du système} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Accumulation de la masse dans} \\ \text{le temps dans le système} \end{pmatrix}$$

La figure 3 représente un exemple qui illustre ce principe, de l'eau entre dans un récipient avec un débit massique de 5kg/s et sort par le bas avec un débit de 3kg/s, ce qui fait que dans un intervalle de temps d'une seconde il y a une accumulation d'eau à l'intérieur du récipient égale à 5 - 3 = 2kg/s.

On peut écrire donc :

$$\dot{m}_{entrant} - \dot{m}_{sortant} = \frac{dm}{dt}$$

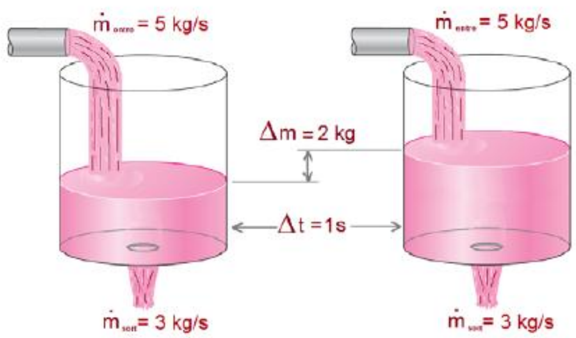

Fig.3 Principe de conservation de la masse pour un récipient ouvert

En appliquant le principe de la conservation de la masse on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, w)}{\partial z} = 0$$

Cette équation est appelée équation de conservation de la masse ou équation de continuité à trois dimensions.

Où u, v, et w sont les composantes de la vitesse respectivement suivant x, y et z

Dans le cas où ρ est constante (écoulement incompressible) alors on obtient :

$$\frac{\partial(\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\, v)}{\partial y} + \frac{\partial(\, w)}{\partial z} = 0$$

7. Théorème de Bernoulli

La loi de conservation d'énergie qui stipule que la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie due à la pression et de l'énergie potentiel (autrement dit l'énergie mécanique totale) est toujours constante nous permet d'arriver au équations suivantes :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = Constante$$

En divisant par g on obtient :

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z = Constante$$

En multipliant par ρ la première équation on obtient :

$$\rho\frac{v^2}{2} + P + gz = Constante$$

Ces équations représentent les différentes formes de l'équation de Bernoulli pour laquelle les simplifications suivantes ont été considérées :

- Applicable le long d'une ligne de courant
- Fluide incompressible $\rho = Cst$
- Écoulement permanant $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$
- Effets visqueux négligeables

8. Cas d'un écoulement entre deux points sans échange de travail

Lorsque, dans un écoulement d'un fluide parfait et incompressible, il n'y a aucune machine (ni pompe ni turbine) entre les points (1) et (2) d'une même ligne de courant, la relation de Bernoulli peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\rho}{2}({v_2}^2 - {v_1}^2) + (P_2 - P_1) + \rho g(z_2 - z_1) = 0$$

Applications

Exercice 1

Un tuyau avec un diamètre égal à 2.54 cm est utilisé pour remplir un seau d'eau d'une capacité de 75 litres. Si la vitesse moyenne de l'eau dans le tuyau est de 2.44 m/s, déterminer :

a) Le débit volumique (en litre/s) et le débit massique (en kg/s) dans le tuyau. b) Combien de temps faudrait-il pour remplir le seau d'eau ?

Réponse : a) Q = 1.236 l/s, $\dot{m}$= 1.236 kg/s, b) Δt = 61 s.

Exercice 2 (Figure 1)

Une piscine d'un diamètre D=10m contient 2m d'eau comme le montre la figure. La piscine doit être vidée à l'aide d'un tuyau horizontal fixé à sa partie inférieure. Le tuyau a un diamètre d=3 cm et une longueur de 25 m. Déterminer le débit volumique maximum de décharge Q (en litre par seconde).

Réponse : Q_{max} = 4.43 l/s

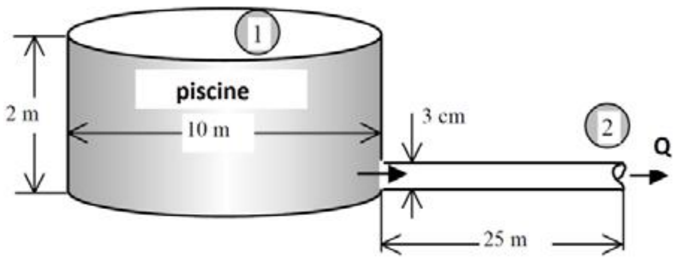

Figure 1