المحور 02: نظرية التقدير

المحاضرة 04 : التقدير النقطي

كما رأينا في المحاضرات السابقة، فإن المجتمع الإحصائي يمثَّل بمتغير عشوائي X، ومعرفتنا لتوزيع هذا المتغير العشوائي يجعلنا قادرين على دراسته احتماليا، وعادة يكون توزيع المجتمع أو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يتبع المعالم، وعندما تكون هذه المعالم مجهولة نلجأ لتقديرها اعتمادا على عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من المجتمع X.

تتم عملية التقدير الاحصائي بطريقتين:

- **التقدير النقطي .**
- **التقدير بمجال ثقة .**

أولا التقدير النقطي:

توجد عدة طرق لإيجاد التقديرات النقطية نذكر من بينها:

- طريقة المعقولية العظمى (وتسمى أيضا أقصى إحتمال)
- طريقة العزوم.
- طريقة الحد الأدنى لمربع كاي .
- طريقة المربعات الصغرى العادية

مايهمنا هو التقدير بالمعقولية العظمى والعزوم حسب ما هو مقرر في دليل المادة. .

1- المعقولية العظمى:

إذا كانت $x_1, x_2 \dots \dots x_n$ عبارة عن قيم عينة عشوائية مأخوذة بالحجم n من مجتمع له دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة (الكتلة الاحتمالية) $f(x_1, x_2, \dots \dots, x_n, \theta)$ أو $P(x_1, x_2, \dots \dots, x_n, \theta)$ لقيم العينة، فإن دالة المعقولية والتي يرمز لها بـ $L(\theta)$ يتم تعريفها على أنها التوزيع المشترك لتلك القيم. أي:

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$$

- في الحالة المتقطعة (المنفصلة):

$$L(\theta) = P[X_1 = x_1]P[X_2 = x_2] \dots P[X_n = x_n] = \prod_{i=1}^{n} P(x_i, \theta)$$

- في الحالة المتصلة (المستمرة):

$$L(\theta) = f[x_1, \theta]\, f[x_2, \theta] \dots\, f[x_n, \theta] = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

لتسهيل القراءة، نضع $L(\theta) = L$.

وتكون قيمة θ هي حلا لجملة المعادلات:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$$

وبما أن الدالة lnL تبلغ نهايتها العظمى عند النقطة نفسها التي تبلغ عندها الدالة L نهايتها العظمى فإننا سنبحث عن $\hat{\theta}$ التي قيمتها هي حل لجملة المعادلات:

$$\frac{\partial lnL}{\partial \theta} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial^2 lnL}{\partial \theta^2} < 0$$

مثال:

1- إذا كانت المتغيرة العشوائية تتبع توزيع بواسون: $X \sim \wp(\theta)$، فأوجد مقدر المعقولية العظمى.

2- إذا كانت المتغيرة العشوائية تتبع التوزيع الأسي: $X \sim \xi(\theta)$، فأوجد مقدر المعقولية العظمى

الحل:

1- بالنسبة لتوزيع بواسون:

$$\mathbf{f(x,\theta) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}} \qquad \mathbf{, x = 0, 1, 2, 3 \dots}$$

$$\mathrm{L(\theta) = L(\lambda)} = L = \mathrm{P[X = x_1]P[X = x_2] \dots . P[X = x_n]}$$

$$= \frac{\mathrm{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}}{\mathrm{x_1!}} . \frac{\mathrm{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}}{\mathrm{x_2!}} \dots . \frac{\mathrm{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}}{\mathrm{x_n!}}$$

$$= \frac{\mathrm{e^{(-\lambda-\lambda \dots -\lambda)}\ \lambda^{x_1+x_2 \dots +x_n}}}{\mathrm{x_1!\,x_2! \dots x_n!}}$$

$$= \frac{\mathrm{e^{-n\lambda}\ \lambda^{\sum x_i}}}{\prod_{i=1}^{n} \mathrm{x_i!}}$$

بإدخال اللوغاريتم تصبح الدالة هي:

$$\ln L = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i\, ln\lambda - ln \prod_{i=1}^{n} x_i!$$

وباشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للمعلمة λ وجعلها مساوية للصفر نجد:

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \lambda} = -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{\lambda}\right) - 0 = 0$$

$$\Rightarrow -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x_i} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x_i} = \overline{\boldsymbol{X}}$$

الآن نتحقق من توفر الشرط الثاني $\frac{\partial^2 logL}{\partial \theta^2} < 0$:

$$\frac{\partial^2(\ln L)}{\partial \lambda^2} = 0 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x_i}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) < 0$$

وبذلك مقدر المعقولية العظمى لتوزيع بواسون هو متوسط العينة.

2- بالنسبة للتوزيع الأسي:

$$\mathbf{f(x,\theta)} = \begin{cases} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{e}^{-x/\lambda} & , \boldsymbol{x} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

$$\mathrm{L(\theta) = L(\lambda)} = L = \mathrm{f[x_1},\theta]\mathrm{f[x_2},\theta] \ldots . \mathrm{f[x_2},\theta]$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{e}^{-x_1/\lambda}.\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{e}^{-x_2/\lambda}\ldots.\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{e}^{-x_n/\lambda}$$

$$= \boldsymbol{\lambda}^{-\boldsymbol{n}}.\boldsymbol{e}^{-\sum x_i/_{\lambda}}.$$

ندخل اللوغاريتم:

$$\ln L = -\mathrm{n}\ \ln\lambda - \frac{\sum \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

وبذلك:

$$\frac{\partial lnL}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\lambda} + \frac{\sum x_i}{\lambda^2} = 0 \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{\boldsymbol{X}}$$

أما المشتق الثاني:

$$\frac{\partial^2 lnL}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} - 2\frac{\sum x_i}{\lambda^3} < \mathbf{0}$$

إذن المشتق الثاني سالب، وبذلك نقول أنّ $\overline{X}$ هو مقدر معقولية عظمى للمعلمة λ.

-2- طريقة العزوم

مبدأ هذه الطريقة أنها تقوم بمساواة عزوم العينة بعزوم المجتمع والتي هي عبارة عن دوال للمعالم المجهولة.

لتكن X متغير عشوائي يتبع في توزيعه المعالم المجهولة $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_k$، فإننا نقوم بحل k معادلة من الشكل التالي:

$$\mu'_r = M'_r$$

حيث:

$\mu'_r = E(X)^r$ عزم المجتمع من الرتبة r حول الأصل.

$M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$ عزم العينة من الرتبة r حول الأصل.

وبذلك بالحل المشترك لجملة المعادلات نحصل على المقدرات $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots\ldots, \hat{\theta}_k$ للمعالم $\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_k$.

مثال:

$X \sim \wp(\lambda)$ ، بطريقة العزوم أوجد مقدرا لمعلمة هذا التوزيع.

الحل:

$$f(x,\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad , x = 0,1,2,3 \ldots$$

نحن نعلم أن العزم الأول حول الأصل لمتوسط مجتمع يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λ هو:

$$\mu'_r = E(X)^r \Rightarrow \boldsymbol{\mu'_1} = E(X) = \lambda$$

كذلك لدينا عزم العينة حول الأصل هو:

$$M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \Rightarrow \boldsymbol{M'_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^1 = \bar{X}$$

وعندما نساوي عزم المجتمع بعزم العينة نجد:

$$\boldsymbol{\mu'_1 = M'_1 \Leftrightarrow \lambda = \bar{X}}$$

أي أنّ $\boldsymbol{\hat{\lambda} = \bar{X}}$ مقدر للمعلمة $\boldsymbol{\lambda}$.

مثال آخر:

$X \sim \xi(\lambda)$ ، بطريقة العزوم أوجد مقدرا لمعلمة هذا التوزيع.

الحل:

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \quad ; x > 0 , \lambda > 0$$

نحن نعلم أن العزم الأول حول الأصل لمتوسط مجتمع يتبع التوزيع الأسي بالمعلمة $\frac{1}{\lambda}$ هو:

$$\boldsymbol{\mu'_1} = E(X) = \lambda$$

كذلك لدينا عزم العينة حول الأصل هو:

$$\boldsymbol{M'_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

وبذلك عندما نساوي عزم المجتمع بعزم العينة نجد:

$$\boldsymbol{\mu'_1 = M'_1 \Leftrightarrow \lambda = \bar{X}}$$

أي أنّ $\boldsymbol{\hat{\lambda} = \bar{X}}$ مقدر للمعلمة $\boldsymbol{\lambda}$.