Centre universitaire de Mila
Institut de Mathématiques et Informatique
Première année LMD informatique 2023-2024
Matière : Algèbre II **Série 2**

Exercice n°1 :

1. Soit E un espace vectoriel sur K. Supposons que les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 de E sont linéairement indépendants. Montrer que les vecteurs $u_1 = v_1, u_2 = v_1 + v_2, u_3 = v_1 + v_2 + v_3, u_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ sont linéairement indépendants aussi.
2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $F =< B = \{f_1, f_2\} >$ où f_1 et f_2 sont des applications définies par $\forall x \in \mathbb{R} : f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \sin x$.
   (a) Montrer que $B = \{f_1, f_2\}$ est une famille libre de E.
   (b) Soient α, β deux réels fixés. Soient f, g les applications définies par
   $$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \cos(x + \alpha), g(x) = \sin(x + \beta)$$
   (c) Montrer que f, g appartiennent à F, et expliciter leurs coordonnées dans la base B de F.
3. Soient $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq 2\}$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieure ou égal à 2 sur $\mathbb{R}$ et $B = \{P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2\}$ sa base canonique.
   (a) Montrer que la famille $B' = \{Q_1 = 1 + X, Q_2 = 2X^2, Q_3 = X + X^2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $P = 2 + 3X - X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ dans cette base.

Exercice n°2 : Soit E un $K-$espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E. On définit la partie $F_1 + F_2$ de E par

$$F_1 + F_2 = \{x \in E : x = x_1 + x_2, x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2\}$$

Montrer que $F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E.

Exercice n°3 : On considère les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y = 0 \text{ et } -x + 3z - t = 0\right\} \\ G &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + t = 0\right\} \end{aligned}$$

1. Construire une base pour chacun des sous espaces vectoriels F et G.
2. Déterminer $F \cap G$ et en déduire une base de $F \cap G$.
3. Trouver $\dim_{\mathbb{R}} F$, $\dim_{\mathbb{R}} G$, $\dim_{\mathbb{R}} F + G$.

Exercice 04 : On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les sous espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\} \\ \mathfrak{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\} \end{aligned}$$

Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice n°1 : (Supplémentaire) Soient $Q_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), Q_1 = -X(X-2), Q_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $B' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et exprimer $P = 2X^2 - 3X$ dans cette base .

2. Pour tout A, B et C réels montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que $P(0) = A, P(1) = B$ et $P(2) = C$.

<u>Exercice n°2 :</u> (Supplémentaire) Soit F_1 et F_2 les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par $L_1 = \{a_1 = (0, -1, 1), a_2 = (1, 1, 1)\}$ (i,e : $F_1 = vect\{a_1, a_2\}$) et $L_2 = \{b_1 = (1, -1, 1), b_2 = (1, -1, -1)\}$ (i,e : $F_2 = vect\{b_1, b_2\}$).

1. Déterminer une famille génératrice L_3 de $F_1 + F_2$.
2. Trouver les dimensions de $F_1, F_2, F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2$.

<u>Exercice n°3 :</u> (Supplémentaire) On considère dans $E = \mathbb{R}_4[X]$ les sous-ensembles $\mathcal{P} = \{P \in E : P \text{ est pair}\}$ et $\mathcal{I} = \{P \in E : P \text{ est impair}\}$

1. Soit $P \in E$. Montrer que $P \in \mathcal{P}$ si et seulement si les coefficients de ses termes de degré impair sont nuls.
2. Soit $P \in E$. Montrer que $P \in \mathcal{I}$ si et seulement si les coefficients de ses termes de degré pair sont nuls.
3. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.