المحور 01: نظرية المعاينة وتوزيعاتها

المحاضرة 03 : توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين، وللفرق بين نسبتي عينتين وللتباين

أولا: توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين: $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$

1- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين مستقلتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$

نظرية (03): إذا كان لدينا مجتمعان طبيعيان مستقلان بحيث $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ بحجم n_1 و n_2 مسحوبتين من هذين المجتمعين هو توزيع طبيعي بحيث:

- $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
- $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

هناك 03 حالات:

❖ **σ_1^2 و σ_2^2 معلومين:**

يكون توزيع الفرق بين متوسطي عينتين هو:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

❖ **σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و n_1 و n_2 كبيرين:**

توزيع الفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي.

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

❖ σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين و n_1 و n_2 صغيرين أو أحدهما صغير:

في هذه الحالة توزيع الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية $(\vartheta = n_1 + n_2 - 2)$، أي:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

أما إحصائية ستودنت فتكون:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

- حالة خاصة: عندما يكون $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

نقدر σ^2 بـــ S_p^2 حيث:

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

أما إحصائية ستودنت فتكون:

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_P^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

2- توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين مرتبطتين.

إذا كان $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ وكان المجتمعان مرتبطان وسحبت من كل مجتمع عينة حجمها n وكانت X_i وY_i القيمتين المتناظرتين في العينتين، فإنّ الفروق بين قيم العينتين المتناظرة $(D_i = X_i - Y_i)$ يمكن النظر إليها على أنها عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ وتباينه σ_D^2 . وبذلك يكون متوسط العينة μ_d و تباينها S_d^2.

ويجب أن نميز بين التوزيع في حالة العينات الكبيرة والعينات الصغيرة:

❖ العينات الكبيرة $(n \geq 30)$:

يكون توزيع الوسط الحسابي هو:

$$\bar{D} \sim N(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n})$$

وبالتالي:

$$Z=\frac{\bar{D}-\mu_D}{\sqrt{\frac{\sigma_D^2}{n}}}\sim N(0,1)$$

❖ العينات الصغيرة $(n<30)$:

يكون توزيع الوسط الحسابي هو:

$$\bar{D}\sim t(n-1)$$

وبالتالي:

$$T=\frac{\bar{D}-\mu_D}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}}\sim t(n-1)$$

ثانيا: توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين $(\widehat{P_1}-\widehat{P_2})$

إذا سحبنا عينة كبيرة n_1 من مجتمع يخضع لتوزيع برنولي $(X_1\sim b(1,P_1))$ وسحبنا عينة كبيرة أخرى n_2 من مجتمع آخر مستقل عن المجتمع الأول ويخضع لتوزيع برنولي $(X_2\sim b(1,P_2))$ فإن الفرق بين النسبتين في العينتين $(\widehat{P_1}-\widehat{P_2})$ هو متغير عشوائي يخضع تقريبا للتوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين هما على التوالي:

$$\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}=\mu_{\hat{P}_1}-\mu_{\hat{P}_2}=p_1-p_2$$
$$\sigma^2{}_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}=\sigma^2{}_{\hat{P}_1}+\sigma^2{}_{\hat{P}_2}=\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}$$

ويكون توزيع الفرق بين نسبتي العينتين هو:

$$(\widehat{P_1}-\widehat{P_2})\sim N\left(p_1-p_2,\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}\right)$$

ومنه:

$$Z=\frac{(\widehat{P_1}-\widehat{P_2})-p_1-p_2}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

ثالثا: توزيع المعاينة للتباين

إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع موزع توزيعا طبيعيا متوسطه μ وتباينه σ^2 أي $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ وكان S^2 هو تباين العينة فإن $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ يخضع لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية $n-1$ أي $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$.

رابعا: توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني عينتين

إذا سحبنا عينة حجمها n_1 من مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ وكان تباينها S_1^2، وسحبنا عينة أخرى حجمها n_2 من مجتمع آخر يتوزع توزيعا طبيعيا مستقل عن الأول $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ وكان تباينها S_2^2 فإن:

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2_{(n_1-1)} \qquad , \qquad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2_{(n_2-1)}$$

وبحسب توزيع فيشر ومن أجل مجتمعين مستقلين تكون الإحصاءة:

$$f=\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

ومنه:

$$f=\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$